# 現代数理論理学序説

古森雄一・小野寛晰［著］

日本評論社

# 現代数理論理学序説

古森雄一・小野寛晰［著］

日本評論社

# まえがき

数理論理学は 20 世紀初頭に誕生し，20 世紀のなかばからさらに大きく発展してきた．概念構成や枠組みなどの数理論理学の方法論とそれにより得られた成果は，関連する諸分野にも大きな影響をあたえてきた．本書は，このような数理論理学の成果のうちで現代的な観点からもっとも基本的で重要と思われるテーマを選んで解説した数理論理学への入門書である．その解説にあたっては，伝統的なスタイルにとらわれることなく，現代的な意義に重点をおいて新たな視点からの展開を試みた．

たとえば本書では数理論理学の基本的な結果であるゲンツェンの基本定理とゲーデルの完全性定理をとりあげている．この 2 つは 1930 年代に得られた古典的な結果であるが，本書でのゲンツェンの定理の証明は，証明図とラムダ項の間のカリー・ハワードの対応を使っている．カリー・ハワードの対応の重要性が日本の論理学や理論計算機科学の専門家の間で認識されるようになったのは 1980 年代のなかばになってからであろう．このように本書では内容の選び方や証明の記述のしかたについていろいろな工夫をおこなった．そのような理由で書名を『現代数理論理学序説』としたのである．初学者にとっての入門書としてだけでなく，すでに数理論理学についての知識をもっている読者にとっても面白い本であってほしいと願っている．

本書の 1 章，2 章，3 章は古森が担当し，4 章は小野が担当している．おおざっぱにいえば，3 章までは構文論や証明論に重点がおかれ，4 章では意味論に重点がおかれているといっていいだろう．本書の原形はほぼ 17 年前に完成していた．その内容は，1 章が「命題論理」，2 章が「述語論理」，3 章が「いろいろな論理」というものであった．それを講義などで使いながら徐々に改訂を繰り返して本書ができあがった．

1 章は命題論理，2 章は述語論理というように，命題論理と述語論理を別けた構成にした．このような構成を採用するとほぼ同じ議論を繰り返すことになる．とくに述語論理の構文論の議論は命題論理の場合と同じように展開されることになる．しかし，このような繰り返しは初学者にとっては理解の助けになるものと思う．最初に聞いたときには分からなくても，2 度目に聞いたときは理解できるということはよくあることである．

ゲンツェン自身があたえた基本定理の証明は，場合分けの数が非常に多くなってしまう．論理記号の数を減らすことにより，場合分けの数を減らすこともできるが，それでもまだ多くの場合分けが必要である．初学者にとってはそのような煩わしさによって証明の本質を見失ってしまいかねない．ゲンツェンがおこなった証明を述べた邦書もすでにいくつかあるの

で，本書ではそれとは違って，自然演繹の正規化定理とグリベンコの定理を経由することによって古典論理の基本定理の証明をあたえている．証明の詳細は本文を見てほしいが，このような証明が書かれている類書はないと思っている．

17 年前の草稿から 2005 年 4 月までは，1 章と 2 章の内容に細かな改訂が施されただけであったが，2005 年 4 月の改訂で大幅に書き直すとともに，3 章「ラムダ計算の世界」を新たにつけ加えた．ラムダ項についてはすでに 1 章で導入し，カリー・ハワードの対応の考え方を取り入れることにより，自然演繹とラムダ項の型付けの体系が同一視できることを示している．ただ，ラムダ計算自体がどのようなものであるかについても述べておく必要を感じ，この章をつけ加えることにした．また，この章で紹介する極小の概念は正規な証明図の唯一性と密接な関係にある新しいものである．

4 章では基本的な非標準論理である直観主義論理や様相論理，著者たちが深く研究に関わってきた中間論理や部分構造論理など，さまざまな体系を紹介している．とくに，この 10 年ほど急速に研究が進展している「論理学への代数的アプローチ」に力点をおき，普遍代数や代数的論理学の基礎的な概念や結果を述べた．

本書の 1 章，2 章，3 章の内容を読むにあたって，数理論理学や数学の予備知識はとくに仮定していない．本書では，ある種の数学的帰納法がよく使われているが，数理論理学を初めて学ぶ読者はそのような帰納法に慣れていないであろう．本書の問題などを自力で解くことによりその帰納法を身につけて欲しい．また，最初に数理論理学やラムダ計算を学ぶときに必ず学んでほしい内容と読み飛ばしていい内容とが混在しているところもある．教育的配慮という点では問題かもしれないが，関連する話題のところでは筆の流れのままにやや高度な内容にも触れて読者の興味を喚起したいということでこのようなスタイルを採用した．したがって初めて数理論理学やラムダ計算を学ぶ人は，やや難しく思われる部分は軽く読み流すのがよい．どの部分がそのような部分かは具体的には述べないが，初学者は基本的な問題 (* 印がついている) を解くために必要な部分をじっくり読んでほしい．なお，一部の問題の解答は以下の WEB ページに掲載する予定である (http://homepage2.nifty.com/kame-shobo/)．初めから解答を見てしまうのは論外だが，しばらく考えて分からなければ，解答を見て同じような次の問題に取り掛かるのがよいだろう．

本書が出版に至るまで想像以上の年月がかかってしまった．その間，私たちの周辺にいたさまざまな人たちから草稿についてのコメントや助言をいただいた．ようやく完成に至るにあたり亀書房の亀井哲治郎氏に負うところが大きい．これらの方々に心から感謝したい．

2010 年 4 月下旬

古森雄一
小野寛晰

# 目　次

# 第1章　命題論理

## 1.1. 論理学と形式的体系

### 1.1.1　形式化とは？

論理学は非常に古くからある学問です．ギリシャ時代の哲学者アリストテレスによって完成されてしまったと考えられていました．そのために，ギリシャ時代から 19 世紀後半までほとんど進歩がありませんでした．19 世紀後半からは集合論の公理化と並行して，論理学も著しい進歩を遂げ，1930 年のゲーデルの完全性定理に到達しました．その進歩の中で克服しなければならなかったそれまでの考え方の 1 つが，意味と形式の混在でした．

文「二等辺三角形の底角は等しい」は意味のある文です．この文はその意味とは無関係に 13 文字からなるという形式をもっています．この程度の意味と形式の分離ならば容易にできますが，証明を意味を考えずに形式だけで行うのはむずかしいことだったようです．証明の一部を意味を考えずに形式的に行うことは，論理学を知らなくてもよくあることです．たとえば，証明の途中に出てくる 10 進法による計算などは意味など考えずに形式的にしています．一部を形式的に行い一部を意味を考えて行うということが，事態をかえってむずかしくしています．

論理学の発展の途中でもそのようなことが起きています．ゲーデルの完全性定理とほぼ同値の定理を 1920 年にスコーレムが示していますが，完全性定理には到達しませんでした．それはまだ構文論と意味論 (この 2 つの言葉の説明はすぐ後に出てきます) の分離が完全にはできていなかったためと考えられます．構文論と意味論の分離ができていれば，最初に気になるのは健全性定理と完全性定理とが成り立っているだろうか，ということです．ですから，2 つの分離ができていれば，ほぼ同値の定理を証明したのに完全性定理を証明しないというのは考えづらいことなのです．

数学はその歴史の中で，さまざまな人類共通の記号法を創り出してきました．その最たるものが 10 進法による数の表示とそれを使った計算法です．また，変数を使った方程式の表現法，空間の位置の座標による表現，微積分に使われる導関数の記法や積分記号などがなかったら，数学の発展だけでなく現代の科学技術の存在もおぼつかなかったでしょう．これらの記号法は意味内容を正確かつ簡潔に表現するだけでなく，定理の証明や新しい事実の発見にも役立ったのです．この記号化の方向を極端に進めたのが形式化です．しかし，記号化と形式化には決定的な違いがあります．記号化された定理を記号化された公理から記号に対する

規則だけで導くことを目論んだのが形式化です．すなわち，証明を意味内容を考えずに機械的に行おうというわけです．形式化が進められたのは，コンピュータがまだ存在しない前世紀の初め頃のことでした．それが行われたのは，証明を機械にやらせるという夢の実現を目指すということもあったのですが，もっと差し迫った必要があったからです．

カントールが19世紀の終り頃に集合論を創りました．デデキントやフレーゲは，集合論を使うと数学で使われるほとんどあらゆる概念を生み出すことができることを示しました．ところが，彼らがそのような努力をしている最中に集合論の中に矛盾が発見されてしまったのです．そのパラドックスを克服するためにいくつかの考え方が現れたのですが，それらのうちある意味で完全に成功したのが集合論を形式化するというものです．形式化された集合論を公理的集合論といいます．

公理的集合論では，まず日本語などの自然言語で書かれていた集合論の命題を人工言語で表現します．人工言語で表現した命題のいくつか (無限個でもいい) を矛盾しないように選んで公理とします．また，公理から定理を導くための推論規則を決めてやります．その後はその規則を使って，意味内容を考えず機械的に次々と (形式化された命題である) 定理を証明すればいいのです．なぜ形式化が必要だったのかは，自然言語のもつ曖昧さを排除するためだけでなく，無限個の公理をきちんと述べるためでもありました．実際，ツェルメロ–フレンケルの公理的集合論は無限個の公理をもった体系です．また形式化によりそれらが数学的に取り扱いやすいものになりました．公理的集合論には現在のところ矛盾は現れていません．

公理的集合論の推論規則は集合論に特有のものではなく，すべての数学の理論に共通のものです．公理的集合論の公理には集合論に特有のものとすべての理論に共通のものとがあります．そのすべての理論に共通の推論規則と公理を集めてできた体系が，2章で学ぶ述語論理の体系です．述語論理の体系の重要な一部分を取り出してできたのが，本章で学ぶ命題論理の体系です．

このように**形式的体系 (formal system)** はもともと意味内容のあるものを形式化してできたものなのですが，この方法が確立すると，先に形式的体系があって後からその意味を考える，というような例も出てきました．そのような例の1つが次に述べる体系 CLw です．私たちは意味内容を考えずに何かを取り扱うことに慣れていません．どうしても，それぞれの記号で表されるものはどのような意味なのだろうか，などと考えてしまいます．形式的体系の性質を，意味内容を考えずに単なる記号列の関係として調べる方法を**構文論的 (syntactical)** な方法といいます．また，意味内容について全く触れずに述べることのできる形式的体系の性質を構文論的な性質といいます．構文論的な方法に慣れるまでは，意味内容がよく分からない体系を扱うほうがよいと考え，組み合わせ論理の体系 CLw を最初に扱う形式的体系としました．

本書の1章と2章では，論理の体系を主として構文論的な方法で取り扱っています．そして，論理の最も美しい定理といわれているゲンツェンの基本定理を目標としました．ゲンツェンの基本定理は論理の構文論的な性質を述べた定理です．

形式的体系は構文論的な取扱いだけをしていればいいかというと，そういうわけにはいきません．ある意味内容のある理論を形式化して作られた形式的体系の場合，その形式的体系

が元の意味内容を的確に実現した体系になっていることを示さなければなりません．そのためには，意味内容の意味をきちんと定義する必要があります．きちんと定義された形式的体系の意味をその体系の**意味論 (semantics)** といいます．ある体系で証明できる式がすべてその体系の意味論で正しい (valid) とき，その体系では**健全性定理 (soundness theorem)** が成り立っているといいます．逆に，その体系の意味論で正しい式がすべてその体系で証明できるとき，その体系では**完全性定理 (completeness theorem)** が成り立っているといいます．意味論を使って形式的体系の性質を調べる方法を**意味論的 (semantical)** な方法といいます．論理学の構文論的な性質を述べた定理であるのに，不思議なことに，意味論的には簡単に証明できるが，構文論的な証明は非常にむずかしいものがあります．

### 1.1.2　組み合わせ論理の体系 CLw

**組み合わせ論理 (combinatory logic)** の体系 CLw を定義します．CLw の基本記号 (primitive symbol) は可算個の変数 '$u_0$', '$u_1$', '$u_2$', $\cdots$ と 'K', 'S' を含む定数記号と 2 つの括弧 '(', ')' です．

記号の有限列や記号をある形に配置した (たとえば，木状に並べた) もののことを**表現 (expression)** といいます．ある表現の中に同じ記号が何回か現れることがあります．その現れる場所も含めて記号を指定するとき，**出現 (occurrence)** という言葉を使います．たとえば次のような使い方をします．表現 S$u_0$(SK$u_0$) には定数記号 K の出現は一度しかない．変数 $u_0$ の出現は二度で，最初の出現は S の次で，2 番目の出現は K の次です．出現という言葉は記号に対してと同じように記号列に対しても使われます．たとえば，表現 SSK$u_0$SSK には SSK の出現が二度あり，最初の出現は先頭で，2 番目の出現は $u_0$ の次です．

CLw の基本記号からつくられる表現の中に CL-項と呼ばれるものがあります．**CL-項 (CL-term)** は次のように定義されます．

**定義 1.1.1 (CL-項)**

1. 変数と定数記号は CL-項である (この形の CL-項を**原子 (atom)** という)，
2. $M$ と $N$ が CL-項ならば，$(MN)$ は CL-項である (この形の CL-項を**適用 (application)** という)．
3. 1 と 2 から CL-項と分かるものだけが CL-項である．

この定義では，まず最も簡単な CL-項を 1 で与え，次にこれらから新しい CL-項をつくり出す規則を 2 で与えています．3 ではこれらの規則から得られないものは CL-項ではないと宣言しています．このような定義を**帰納的定義 (inductive definition)** といいます．以後の帰納的定義では 3 のような文は省略します．

前後の文脈で CL を省略しても誤解が生じないときは，CL-項を単に項ということがあります．とくにこの節では，項といえば CL-項のことです．ここで，$M$ と $N$ は項を表す変数なのですが，基本記号の変数と区別するために，このような変数を**メタ変数 (meta-variable)**

といいます．この節では $M$, $N$ などのアルファベットの大文字を項を表すメタ変数として使用します．また，変数を表すメタ変数として '$x$','$y$' '$z$' '$u$','$v$','$x_0$','$y_0$' などを用います．「変数を表すメタ変数」というのは分かりづらい概念だと思いますが，要するに $x$, $y$ などは基本記号の変数そのものではなく，基本記号の変数が代入されるべき場所を示しているのです．今後，変数を表す異なるメタ変数は (とくに断りがないときは) 異なる変数を表すものとします．

定義どおりに項を書くと括弧が多くなって，書きづらいだけでなく読みづらくもなるので，適当に省略します．そして，足りない括弧は左から補うことにします．すなわち，$\mathsf{S}xy\mathsf{S}$ は $(((\mathsf{S}x)y)\mathsf{S})$ を表しています．

項に含まれる変数と定数記号の個数 (同じものがあったら重複して数える) をその項の**長さ (length)** といいます．たとえば，項 $\mathsf{S}xy\mathsf{S}$ の長さは 4 です．変数を含まない項を**閉項 (closed term)** といいます．S, K 以外の定数を含まない閉項を**結合子 (combinator)** といいます．SKKS は閉項 (で結合子) ですが，$\mathsf{S}xy\mathsf{S}$ は閉項ではありません．項 $M$ に含まれる変数の集合を $FV(M)$ と書きます．たとえば，

$$FV(\mathsf{S}xy\mathsf{S}) = \{x, y\}$$

です．項 $M$ が閉項のときは $FV(M)$ は空集合です．

$M$ と $N$ を CL-項とするとき，

$$M \rhd_1 N, \quad M \rhd N \quad および \quad M = N$$

という 3 種類の表現を CLw の**式**といいます．式という概念は体系 CLw の中心的な概念です．証明図という概念が後で出てきますが，証明図によって証明されるのは式ですし，その出発点となる公理も式です．また，証明図は式を木状に並べたものです．

**公理 (axiom)** は可算無限個あるのが普通です．体系 CLw の公理も可算無限個あります．しかし，それらは 3 つの型に分類できます．それらの型のことを**公理型 (axiom schemes)** といいます．体系 CLw の公理型は次の 3 つです．

$$\begin{array}{ll} (\mathsf{K}) & \mathsf{K}MN \rhd_1 M \\ (\mathsf{S}) & \mathsf{S}MNR \rhd_1 MR(NR) \\ (\rho) & M \rhd M \end{array}$$

公理型から公理を得るには，公理型に現れるメタ変数に実際の項を代入します．たとえば，公理型 S のメタ変数 $M$, $N$, $R$ に項 $u_0u_1$, $u_0\mathsf{SK}$, $u_1$ をそれぞれ代入すると，公理

$$\mathsf{S}(u_0u_1)(u_0\mathsf{SK})u_1 \rhd_1 u_0u_1u_1(u_0\mathsf{SK}u_1)$$

が得られます (括弧の省略の仕方に注意してください)．公理型のメタ変数に項を代入して得られる公理を，その公理型の**代入例 (instance)** といいます．式

$$\mathsf{S}(u_0u_1)(u_0\mathsf{SK})u_1 \rhd_1 u_0u_1u_1(u_0\mathsf{SK}u_1)$$

は公理型 S の代入例です．

証明図は公理を葉とする木状の図形です．証明図を作るための規則を**推論規則 (rule of inference)** といいます．体系 CLw の推論規則は次の 6 つです：

$$\frac{N \rhd_1 R}{MN \rhd_1 MR}\,(\mu), \qquad \frac{M \rhd_1 N}{MR \rhd_1 NR}\,(\nu),$$

$$\frac{M \rhd_1 N \quad N \rhd R}{M \rhd R}\,(\tau),$$

$$\frac{M \rhd N}{M = N}\,(\kappa), \qquad \frac{M = N}{N = M}\,(\sigma), \qquad \frac{M = N \quad N = R}{M = R}\,(\tau =).$$

証明図の概念も帰納的に定義できますが，ここでは実例を見て理解してください．次の例は式 $\mathsf{S}(\mathsf{K}u_0)u_1u_2 \rhd u_0(u_1u_2)$ に至る証明図です．

**例 1.1.2**

$$\dfrac{\overset{(\mathsf{S})}{\mathsf{S}(\mathsf{K}u_0)u_1u_2 \rhd_1 \mathsf{K}u_0u_2(u_1u_2)} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{(\mathsf{K})}{\mathsf{K}u_0u_2 \rhd_1 u_0}}{\mathsf{K}u_0u_2(u_1u_2) \rhd_1 u_0(u_1u_2)}\,(\nu) \quad \overset{(\rho)}{u_0(u_1u_2) \rhd u_0(u_1u_2)}}{\mathsf{K}u_0u_2(u_1u_2) \rhd u_0(u_1u_2)}\,(\tau)}{\mathsf{S}(\mathsf{K}u_0)u_1u_2 \rhd u_0(u_1u_2)}\,(\tau)$$

ここで，式 $\mathsf{K}u_0u_2 \rhd_1 u_0$ の上の (K) などは，$\mathsf{K}u_0u_2 \rhd_1 u_0$ が公理型 K の代入例であることを示しています．

式 $A$ に至る証明図のことを $A$ の証明図といいます．また，式 $A$ の証明図が存在するとき，$A$ は**証明可能 (provable)** である，といいます．

例 1.1.2 において，変数 $u_0$，$u_1$，$u_2$ に項を表すメタ変数 $M, N, R$ をそれぞれ代入した図形

$$\dfrac{\overset{(\mathsf{S})}{\mathsf{S}(\mathsf{K}M)NR \rhd_1 \mathsf{K}MR(NR)} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{(\mathsf{K})}{\mathsf{K}MR \rhd_1 M}}{\mathsf{K}MR(NR) \rhd_1 M(NR)}\,(\nu) \quad \overset{(\rho)}{M(NR) \rhd M(NR)}}{\mathsf{K}MR(NR) \rhd M(NR)}\,(\tau)}{\mathsf{S}(\mathsf{K}M)NR \rhd M(NR)}\,(\tau)$$

を考えます．この図形はメタ変数を含んでいるので，証明図そのものではありません．しかし，$M, N, R$ にどんな項を代入しても証明図になります．このことから，任意の項 $M, N, R$ に対して式

$$\mathsf{S}(\mathsf{K}M)NR \rhd M(NR)$$

が証明可能であることが分かります．このことを単に，式 $\mathsf{S}(\mathsf{K}M)NR \rhd M(NR)$ が証明可能である，といいます．この図形のことを $\mathsf{S}(\mathsf{K}M)NR \rhd M(NR)$ の証明図といいます．また $\mathsf{S}(\mathsf{K}M)NR \rhd M(NR)$ のような式をメタ式といいます．しかし，メタ式のことを単に式ということもよくあります．そのときは各メタ変数に項が代入されたものを想定しているのです．これは数学でも，$n$ に関する式 $n+3$ といったり，数 $n+3$ といったりするのと同じ

ことです1).

例 1.1.2 において，変数 $u_0$, $u_1$, $u_2$ に変数を表すメタ変数 $x$, $y$, $z$ をそれぞれ代入した図形

$$\dfrac{\overset{(\mathsf{S})}{\mathsf{S}(\mathsf{K}x)yz \rhd_1 \mathsf{K}xz(yz)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(\mathsf{K})}{\mathsf{K}xz \rhd_1 x}}{\mathsf{K}xz(yz) \rhd_1 x(yz)}\,(\nu) \qquad \overset{(\rho)}{x(yz) \rhd x(yz)}}{\mathsf{K}xz(yz) \rhd x(yz)}\,(\tau)}{\mathsf{S}(\mathsf{K}x)yz \rhd x(yz)}\,(\tau)$$

についても上と同様に考えます．ただし，「そのときは各メタ変数に項が代入されたものを想定しているのです」というところを「そのときは各メタ変数に変数が代入されたものを想定しているのです」に入れ換えます．

▶ **問題 1.1.3*** 式 $x(\mathsf{SKK}y)z \rhd xyz$ に至る CLw の証明図を書け．

いくつかの結合子はよく出現するので名前が付いています．主なものを以下に掲げます．

$$\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}, \qquad \mathsf{B} \equiv \mathsf{S(KS)K}, \qquad \mathsf{C} \equiv \mathsf{S(BBS)(KK)}, \qquad \mathsf{W} \equiv \mathsf{SS(KI)}, \qquad \mathsf{B}' \equiv \mathsf{CB}.$$

体系 CLw の証明図は公理である式を上端とする木状の図形でした．ここで，上端にくる式として公理以外のものを認めたものを**推論図 (deduction)** ということにします．推論図の上端にある式で公理でないものを，その推論図の**仮定 (assumption)** といいます．$\Gamma$ を式の列とします．$\Gamma$ に含まれる式を仮定とし，式 $A$ に至る CLw の推論図があるとき，

$$\Gamma \vdash_{CLw} A$$

と書き，CLw で仮定 $\Gamma$ から式 $A$ が出るといいます．推論図の仮定はすべて $\Gamma$ に入っていなければいけませんが，実際に上端にない式が $\Gamma$ に入っていてもかまいません．一般に，式の列 $\Gamma$ に現れる式の集合と式の列 $\Delta$ に現れる式の集合とが等しいとき，

$$\Gamma \vdash_{CLw} A \quad \text{ならば} \quad \Delta \vdash_{CLw} A$$

です．また，実際に上端にない式が $\Gamma$ に入っていてもかまわないことから，$\Gamma$ に現れる式の集合が $\Delta$ に現れる式の集合に含まれるとき，

$$\Gamma \vdash_{CLw} A \quad \text{ならば} \quad \Delta \vdash_{CLw} A$$

となります．列 $\Gamma$ が空列のときは，$\Gamma \vdash_{CLw} A$ を

$$\vdash_{CLw} A$$

と書きます．これは式 $A$ の証明図があるということを表しています．

---

1) 正確にいうとやや異なっています．$n$ に具体的な数 3 を代入した結果である ‘6 は数である’ という表現と ‘$\mathsf{S}(\mathsf{K}u_0)u_1u_2 \rhd u_0(u_1u_2)$ は式である’ という表現とを考えます．‘6’ は数そのものではなく数を表す数字ですが，‘$\mathsf{S}(\mathsf{K}u_0)u_1u_2 \rhd u_0(u_1u_2)$’ は式そのものです．‘$\mathsf{S}(\mathsf{K}u_0)u_1u_2 \rhd u_0(u_1u_2)$ は式である’ という表現は ‘“桜” は漢字である’ という表現に似ています．いずれにしても，このような細かいことは気にせずに先に進んでください．

式 $M \rhd_1 N$ が証明できるような項 $N$ が存在しないとき，項 $M$ は **w-正規形 (weak normal form)** である，といいます．式 $M \rhd N$ が証明でき，項 $N$ が w-正規形のとき，$N$ は $M$ の w-正規形である ($M$ は w-正規形 $N$ をもつ)，といいます．

**注意 1.1.4**　w-正規形をもたない CL-項が存在する．実際，結合子 SII(SII) は w-正規形をもたない．

$A_1, \cdots, A_n$ を式の列，$B$ を式とします．

$$A_1, \cdots, A_n \vdash_{CLw} B$$

のとき，推論規則

$$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{B}$$

を体系 CLw の**派生規則 (derivable rule)** といいます．また，

$$\vdash_{CLw} A_1 \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } \vdash_{CLw} A_n \quad \text{ならば} \quad \vdash_{CLw} B$$

のとき，推論規則

$$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{B}$$

を体系 CLw の**許容規則 (admissible rule)** といいます．派生規則ならば許容規則です．体系 CLw の派生規則や許容規則を CLw に付け加えても，証明できる式は増えません．

▶ **問題 1.1.5** *　次の 2 つの規則が体系 CLw の派生規則であることを示せ．

$$\frac{M \rhd_1 N}{QMR \rhd_1 QNR} \qquad \frac{M \rhd_1 N}{M \rhd N}$$

▶ **問題 1.1.6**　次の規則が体系 CLw の許容規則であることを示せ．

$$\frac{M \rhd N \quad N \rhd R}{M \rhd R}$$

問題 1.1.6 は $M \rhd N$ に至る証明図の長さに関する帰納法で簡単に証明できます．ここで証明図の長さとは，その証明図に表れる式の数です．たとえば，例 1.1.2 の証明図の長さは 6 です．体系 CLw には「$\rhd$」の推移律に対応する上の推論規則がありませんが，この問題から「$\rhd$」の推移律は CLw の許容規則であることが分かります．

体系 CLw の名前の由来の「CL」の部分は「combinatory logic」の頭文字で，「w」の部分は「weak reduction」の頭文字です．「reduction」というのは (実際には複雑になってしまう場合もあるのですが) 簡単な形に変形するという意味です．体系 CLw の「$\rhd_1$」や「$\rhd$」についての公理型や推論規則は左辺から右辺への変形規則と考えられます．w-正規形というのは，それ以上変形できない項ということになります．この変形のことを **weak 変形 (weak reduction)** といいます．

$\vdash_{CLw} M \rhd_1 N$, $\vdash_{CLw} M \rhd N$, $\vdash_{CLw} M = N$ のとき，それぞれを

$$M \rhd_{1w} N, \quad M \rhd_w N, \quad M =_w N$$

と書きます．$=_w$ は weak 変形で移りあえる項どうしを等しいと見なした同値関係となります．

体系 CLw についての最も重要な定理は次の Church-Rosser の定理 (合流性定理) です．証明については[13]を参照してください．

**定理 1.1.7 (Weak 変形の Church-Rosser の定理)**　$M \rhd_w N$ かつ $M \rhd_w R$ ならば，次のような項 $T$ が存在する：

$$N \rhd_w T \quad かつ \quad R \rhd_w T.$$

この定理と $M =_w N$ を示す証明図の長さについての帰納法により，「$=_w$」についての次の系を証明することができます．

**系 1.1.8**　$M =_w N$ ならば，次のような項 $R$ が存在する：

$$M \rhd_w R \quad かつ \quad N \rhd_w R.$$

問題 1.1.10 によると，体系 CLw に公理 $\mathsf{KI} \rhd_1 \mathsf{K}$ を付け加えた体系では $x = y$ が証明できてしまいます．この変数 $x, y$ にどのような CL-項を代入しても証明できるので，任意の CL-項 $M, N$ にたいして $M = N$ が証明できます．このような体系をつぶれた体系といいます．体系 CLw がつぶれていないことは，上の系を使えば容易に証明できます．

▶ **問題 1.1.9***　次の 5 つの CL-項の w-正規形を求めよ：

$\mathsf{I}x$,　$\mathsf{B}xyz$,　$\mathsf{C}xyz$,　$\mathsf{W}xy$,　$\mathsf{B}'xyz$.

▶ **問題 1.1.10***　次を示せ．

$\mathsf{KI} \rhd_1 \mathsf{K} \vdash_{CLw} x = y$

## 1.2. 命題論理の体系

この章の主題である命題論理は，記号論理の最も基本的な部分です．命題論理とは，簡単な命題からより複雑な命題をつくるための接続詞である「ならば」,「かつ」,「または」や，助動詞である「でない」などの意味や性質について研究する学問です．「命題とは何か？」ということが気になる人もいると思いますが，あまり気にせずに先に進んでください．どうしても気になって先に進めないという人は，「本章で扱う古典論理においては，命題とは真偽の定まった文である」と考えてください．また，「かつ」,「または」,「でない」に対応する論理記号も基本記号にするのが普通ですが，それらはすべて「ならば」と「偽」を使って表すこと

ができます．表し方については 1.2.1 で述べます．そこで，本章では基本的な論理記号としては「ならば」と「偽」に対応する 2 つの記号だけを採用します．このように基本的な論理記号を少なくすることにより，公理や推論規則を少なくすることができます．その結果，演繹定理などの証明の場合分けの数を減らすことができます．

初めて記号論理学を学ぶ人は，推論規則の多さやいろいろな証明の場合分けの多さなどに戸惑ってしまい，本質を見失ってしまいがちです．本質をつかみやすいようにと，基本的な論理記号をなるべく少なくしました．基本的な論理記号としては「かつ」と「でない」,「または」と「でない」,「ならば」と「でない」などいろいろな組み合わせが考えられます．その中で「ならば」と「偽」の組み合わせを選んだのには 2 つの理由があります．その 1 つは，「ならば」が最も基本的で重要な論理接続詞と考えるからであり，もう 1 つは，「偽」についての公理が非常に簡単だからです．

命題論理の形式的体系にはいろいろなものがあります．代表的なものに，公理を多くして推論規則を 1 つにしたヒルベルト (Hilbert) 流といわれているものと，推論規則をなるべく多くして公理を非常に簡単なものに限ったゲンツェン (Gentzen) 流とがあります．また，公理の全くない自然推論 (「まえがき」では自然演繹と書きましたが，自然推論という言葉も同じ意味で使われている) というものもあります．本節では，それら 3 つの体系を提示し，それらが同じ論理を形式化したものであることを示します．概念的に最も簡単なヒルベルト流の体系から始めます．

### 1.2.1　ヒルベルト流の体系

基本記号 (primitive symbol) は可算個の命題変数 ‘$r_0$’, ‘$r_1$’, ‘$r_2$’, $\cdots$ と 2 つの論理記号 ‘$\supset$’ (ならば), ‘$\perp$’ (偽) と 2 つのかっこ ‘(’, ‘)’ です．命題変数は基本的な命題を形式化したものです．論理記号 ‘$\supset$’ と ‘$\perp$’ はそれぞれ「ならば」と「偽」を形式化したものです．論理記号 ‘$\perp$’ は偽命題そのものを形式化したものなので，命題定数とも呼ばれます．**論理式 (formula)** は基本的な命題とそれから接続詞を使ってつくられるより複雑な命題とを含む概念を形式化したものです．それは次のように帰納的に定義されます．

**定義 1.2.1（論理式）**

1. 命題変数と命題定数 $\perp$ は論理式である，
2. $\alpha$ と $\beta$ が論理式ならば，$(\alpha \supset \beta)$ は論理式である．

論理式 $\alpha$ の部分として現れる論理式のことを，$\alpha$ の**部分論理式 (subformula)** といい，次のように定義されます．

**定義 1.2.2（部分論理式）**

1. 論理式 $\alpha$ は論理式 $\alpha$ の部分論理式である，

2. $\alpha$ と $\beta$ が論理式のとき，$\alpha$ の部分論理式は論理式 $(\alpha \supset \beta)$ の部分論理式である．また，$\beta$ の部分論理式も論理式 $(\alpha \supset \beta)$ の部分論理式である．

$\alpha$ と $\beta$ は論理式を表すメタ変数です．$\alpha, \beta$ などのギリシャ文字の小文字を論理式を表すメタ変数として使用します．また，命題変数を表すメタ変数として '$p$', '$q$', '$r$', '$p_0$', '$q_0$', $\cdots$ を用います．定義どおりに論理式を書くと括弧が多くなって，書きづらいだけでなく読みづらくもなるので，適当に省略します．そして，足りない括弧は右から補うことにします．すなわち，$p \supset q \supset r \supset q_0$ は $(p \supset (q \supset (r \supset q_0)))$ を表しています．論理式に含まれる論理記号 $\supset$ の個数をその論理式の**長さ (length)** といいます．たとえば，論理式

$$p \supset q \supset r \supset q_0$$

の長さは 3 です．

- $\neg\alpha$ は $\alpha \supset \bot$ を
- $\alpha \wedge \beta$ は $\neg(\alpha \supset \neg\beta)$ を
- $\alpha \vee \beta$ は $(\alpha \supset \beta) \supset \beta$ を
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ は $(\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$ を

それぞれ略して書いたものとします．$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ はそれぞれ「でない」，「かつ」，「または」，「同値である」を表す論理記号です．これらの記号がどうして「でない」，「かつ」，「または」，「同値である」を表す論理記号となるか，ここでは分からなくても構いません．いまは考察の対象を 2 つの論理記号 $\supset$ と $\bot$ に限ることにします．これまでに論理記号などが引用符にはさまれて現れたり，はさまれずに現れたりしています．厳密には，論理式の中に現れるとき以外は引用符で囲うべきなのでしょうが，厳密な使い分けはしていません．あまり気にせずに先に進んでください．

これから定義する古典命題論理の体系を HK と呼ぶことにします．H は Hilbert の頭文字で，K はドイツ語の klassisch の頭文字です．

CL-項の定義に現れる定数に K, S 以外に P, A が含まれているものとします．$M$ を CL-項，$\alpha$ を論理式とするとき，$M : \alpha$ という表現を HK の式といい，$M$ をその式の**主部 (subject)**，$\alpha$ をその式の**述部 (predicate)** といいます．HK の証明図は式を木状に並べたものです．証明図によって証明されるのは式であり，その出発点となる公理も式です．

**古典命題論理 (classical propositional logic)**

HK の公理型は次の 4 つです．

$$\begin{aligned}
\mathsf{K} &: \alpha \supset \beta \supset \alpha \\
\mathsf{S} &: (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\
\mathsf{P} &: ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha \\
\mathsf{A} &: \bot \supset \alpha
\end{aligned}$$

公理型をその主部の CL-項で呼ぶことにします．公理型の述部の論理式 (正確には，論理式の型) をその公理型の論理式といいます．公理型 A にだけ ‘⊥’ が陽に現れますので，これが「偽」についての公理と考えることができます．前にも述べたこと (「偽」についての公理が非常に簡単だからです) を思い出してください．ただし，A 以外の公理型でもメタ変数には任意の論理式が代入できますので，‘⊥’ が現れる公理を含んでいることに注意してください．

古典命題論理 HK の推論規則は次の形のものだけです．

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{(MN) : \beta}$$

この推論規則を **modus ponens** と呼び，以後 MP と略します．

証明図の概念は前と同じように考えます．次の例は式

$$\mathsf{SKK} : r_0 \supset r_0$$

に至る証明図です．

**例 1.2.3**

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} : \alpha \supset (r_0 \supset r_0 \supset r_0) \supset r_0 \supset r_0 \quad \mathsf{K} : \alpha}{\mathsf{SK} : (r_0 \supset r_0 \supset r_0) \supset r_0 \supset r_0} \quad \mathsf{K} : r_0 \supset r_0 \supset r_0}{\mathsf{SKK} : r_0 \supset r_0}$$

ただし $\alpha \equiv (r_0 \supset (r_0 \supset r_0) \supset r_0)$.

上図において，たとえば式

$$\mathsf{K} : r_0 \supset r_0 \supset r_0$$

は公理型 K の代入例 (**instance**) となっています．

式 $M : \alpha$ に至る証明図のことを $M : \alpha$ の証明図といいます．式 $M : \alpha$ の証明図が存在するとき，$M : \alpha$ は**証明可能 (provable)** である，といいます．また，述部が $\alpha$ の式が証明可能であるとき，論理式 $\alpha$ は**証明可能 (provable)** であるといい，述部が $\alpha$ の式の証明図のことを論理式 $\alpha$ の証明図といいます．

次の例 1.2.4 は例 1.2.3 を省略形で書いたものです．上端にある式以外は主部の CL-項が略されています．例 1.2.4 から例 1.2.3 が完全に再現できるということが重要です．

**例 1.2.4**

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} : \alpha \supset (r_0 \supset r_0 \supset r_0) \supset r_0 \supset r_0 \quad \mathsf{K} : \alpha}{(r_0 \supset r_0 \supset r_0) \supset r_0 \supset r_0} \quad \mathsf{K} : r_0 \supset r_0 \supset r_0}{r_0 \supset r_0}$$

ただし $\alpha \equiv (r_0 \supset (r_0 \supset r_0) \supset r_0)$.

例 1.2.4 において命題変数 $r_0$ にメタ変数 $\beta$ を代入した図形

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S}:(\beta\supset(\beta\supset\beta)\supset\beta)\supset(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta\quad \mathsf{K}:\beta\supset(\beta\supset\beta)\supset\beta}{(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta}\quad \mathsf{K}:\beta\supset\beta\supset\beta}{\beta\supset\beta}$$

を考えます．この図形から，任意の論理式 $\beta$ に対して $\beta\supset\beta$ が証明可能であることが分かります．体系 CLw のときと同様に，このことを単に，論理式 $\beta\supset\beta$ が証明可能である，といいます．この図形のことを $\beta\supset\beta$ の証明図といいます．また，$\beta\supset\beta$ のような式をメタ論理式といいます．しかし，メタ論理式のことを単に論理式ということもよくあります．そのときは各メタ変数に論理式が代入されたものを想定しているのです．

次にいくつかの証明図を書いてもらう問題を出します．その前に，証明図が大きくなり紙面に入らないときなどに，証明図を分割して書く方法を紹介します．直前の証明図を考えます．その図において次の部分証明図を $\Pi$ とします：

$$\dfrac{\mathsf{S}:(\beta\supset(\beta\supset\beta)\supset\beta)\supset(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta\quad \mathsf{K}:\beta\supset(\beta\supset\beta)\supset\beta}{(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta}\,.$$

このとき，もとの証明図を次のように書きます：

$$\dfrac{\Pi\quad \mathsf{K}:\beta\supset\beta\supset\beta}{\beta\supset\beta}\,.$$

また，この $\Pi$ を $(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta$ に至る証明図であることを強調して

$$\begin{array}{c}\Pi\\(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta\end{array}$$

と書くこともあります．そのときは，もとの証明図を次のように書きます：

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta\end{array}\quad \mathsf{K}:\beta\supset\beta\supset\beta}{\beta\supset\beta}\,.$$

このように書くと，$\Pi$ は次のような証明図もどきの図を表しているものと誤解する人もいると思いますが，違いますので注意してください：

$$\mathsf{S}:(\beta\supset(\beta\supset\beta)\supset\beta)\supset(\beta\supset\beta\supset\beta)\supset\beta\supset\beta\quad \mathsf{K}:\beta\supset(\beta\supset\beta)\supset\beta\,.$$

▶ **問題 1.2.5＊**

1. 式 S(KK) : $(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\gamma\supset\beta$ の証明図を描け．
2. 式 S(KS) : $(\delta\supset\alpha\supset\beta\supset\gamma)\supset\delta\supset(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\gamma$ の証明図を描け．
3. 式 B : $(\beta\supset\gamma)\supset(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\gamma$ の証明図を描け．
4. 式 W : $(\alpha\supset\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta$ の証明図を描け．
5. 式 S(KP) : $(\beta\supset\neg\alpha\supset\alpha)\supset\beta\supset\alpha$ の証明図を描け．
6. 式 S(KA) : $\neg\alpha\supset\alpha\supset\beta$ の証明図を描け．
7. 式 $M:\neg\neg\alpha\supset\alpha$ が証明可能であるような CL-項 $M$ を見つけ，その証明図を描け．(注：$\neg\neg\alpha\supset\alpha$ は $\neg\neg(\alpha\supset\alpha)$ を省略したものではない)

**発展 (いろいろな論理)**

古典論理の他にさまざまな論理が研究されています．その中でも最も有名なのが**直観主義論理 (intuitionistic logic)**(1.2.3 節を参照) といわれているものです．大雑把にいえば，直観主義命題論理は古典命題論理の公理型から公理型 P を取り除いて得られるものです．しかし，直観主義論理では '∧' と '∨' を '⊃' と '⊥' を使って定義することはできません．そのために，公理型 K, S, A と推論規則 MP をもつ体系は論理記号 '∧' と '∨' とをもたない直観主義命題論理の体系ということになります．このような体系を直観主義命題論理の {⊃, ⊥}-断片といいます．さらに，論理記号 '⊥' をもたない，すなわち論理記号 '⊃' しかもたない体系を一般に**含意断片 (implicational fragment)** 論理といいます．「論理記号 '⊥' をもたない」といいましたが，論理記号 '⊥' をもつかもたないかは本質的なことではありません．論理記号 '⊥' についての ('⊥' を陽に含む) 公理型をもつかもたないかが重要なのです．もし論理記号 '⊥' についての公理型をもたなければ，論理記号 '⊥' を含んでいても '⊥' が命題変数と同じ振舞いをするだけです．

最近になって，さまざまな含意断片論理がラムダ項や CL-項の型付けとの関連で研究されるようになってきました．そのような論理は，その論理がもつ公理型を羅列することにより名付けられます．体系 HK の公理型 S はそのような論理を記述するのには強すぎるので，その機能をいくつかの公理に分解しておきます．公理型 S は次の 3 つの公理型を合わせたものと同じ強さです．

$$\begin{aligned} \mathsf{B} &: (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\ \mathsf{C} &: (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset \beta \supset \alpha \supset \gamma \\ \mathsf{W} &: (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta \end{aligned}$$

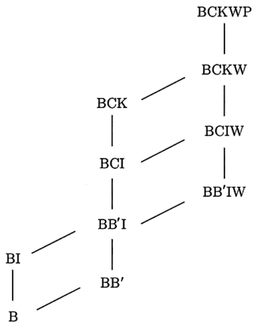
問題 1.2.5 から分かるように，この 3 つの式は体系 HK で証明可能です．また，B, C, K, W, P, A を定数として S を定数から取り除き，公理型 B, C, K, W, P, A と推論規則 MP をもつ体系も古典命題論理の体系となります．このとき S は B(BW)(BBC) と表され，式

$$\mathsf{S} : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$$

が証明可能となります．

たとえば，3 つの公理型 B, C, I (公理型 I は I : $\alpha \supset \alpha$ です) とただ 1 つの推論規則 MP とをもつ論理は BCI 論理と呼ばれています．比較的よく研究されている論理に次のものがあります：B 論理，BI 論理，BB′ 論理，BB′I 論理，BCI 論理，BCK 論理，BB′IW 論理，BCIW 論理，BCKW 論理，BCKWP 論理，すべて推論規則は MP だけをもちます．BCKW 論理と BCKWP 論理はそれぞれ直観主義論理と古典論理の含意断片です．これらの論理で証明できる論理式の集合の包含関係を図示すると次ページのようになります．

ここで，線で結ばれた論理については，下にある論理で証明できる論理式はすべて上にある論理で証明でき，上にある論理で証明できるが下にある論理で証明できない論理式が存在することを示しています．たとえば，式 CKK : $\alpha \supset \alpha$ は公理型 C, K と MP を使って証明できますので，BCI 論理で証明できる論理式は BCK 論理で証明できます．また，公理型 K




のメタ変数 $\alpha, \beta$ にそれぞれ $r_0$, $r_1$ を代入して式 $\mathsf{K} : r_0 \supset r_1 \supset r_0$ が得られるので，論理式 $r_0 \supset r_1 \supset r_0$ はBCK 論理は証明できます．しかし，この論理式はBCI 論理では証明できません．

### 1.2.2　演繹定理

ヒルベルト流の体系 HK では，$\alpha \supset \alpha$ のような簡単な論理式でさえ証明できることを示すには，ちょっとしたひらめきが必要でした．本節で証明する演繹定理を使えば，このような論理式は簡単に HK で証明できることが示せます．

ヒルベルト流の体系の証明図は，公理である式を上端とする木状の図形でした．ここで体系 CLw のときと同様に，上端にくる式として「変数：論理式」という形の式に限って，公理以外のものを認めたものを**推論図 (deduction)** ということにします．

**例 1.2.6**　1 は $\mathsf{S}xyz : \gamma$ に至る推論図で，2 は $xyy : \beta$ に至る推論図の省略形です．

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \quad x : \alpha \supset \beta \supset \gamma}{\mathsf{S}x : (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma} \quad y : \alpha \supset \beta}{\mathsf{S}xy : \alpha \supset \gamma} \quad z : \alpha}{\mathsf{S}xyz : \gamma}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{\alpha \supset \beta} \quad y : \alpha}{\beta}$$

$\Gamma$ を主部が変数の式の列とします．$\Gamma$ に含まれる式と公理とを上端とし，$M : \alpha$ に至る推論図があるとき，

$$\Gamma \vdash_{HK} M : \alpha$$

と書き，HK で仮定 $\Gamma$ から $M : \alpha$ が出るといいます．公理以外で上端にあるものはすべて $\Gamma$ に入っていなければいけませんが，実際に上端にない主部が変数である式が $\Gamma$ に入っていてもかまいません．$\Gamma$ に主部が変数の式の列という制限をつけたおかげで，$\Gamma \vdash_{HK} M : \alpha$ のときにそれを示す推論図の形が CL-項 $M$ により決定されます．とくに，$M$ が適用のときは推論規則 MP が最後に使われたことが分かります．

$\Gamma(\equiv \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を論理式の列，$\beta$ を論理式とします．

$$z_1 : \alpha_1, \cdots, z_n : \alpha_n \vdash_{HK} M : \beta$$

となる変数 $z_1, \cdots, z_n$ と CL-項 $M$ が存在するとき，

$$\Gamma \vdash_{HK} \beta$$

と書きます．例 1.2.6–1 からは

$$x : \alpha \supset \beta \supset \gamma,\ y : \alpha \supset \beta,\ z : \alpha \vdash_{HK} \mathsf{S}xyz : \gamma\ ,$$

$$y : \alpha \supset \beta,\ u : \delta,\ x : \alpha \supset \beta \supset \gamma,\ z : \alpha \vdash_{HK} \mathsf{S}xyz : \gamma\ ,$$

$$\alpha \supset \beta,\ \delta,\ \alpha \supset \beta \supset \gamma,\ \alpha \vdash_{HK} \gamma$$

などが分かります．また，例 1.2.6–2 では仮定 $y : \alpha$ が 2 ヵ所で使われていますが，$\Gamma$ には $y : \alpha$ が 1 つだけ入っていればいいということにします．例 1.2.6 –2 は

$$y : \alpha,\ x : \alpha \supset \alpha \supset \beta \vdash_{HK} xyy : \beta\ ,$$

$$\alpha,\ \alpha \supset \alpha \supset \beta \vdash_{HK} \beta$$

などを示しています．

▶ **問題 1.2.7***　$\alpha \supset \beta,\ \beta \supset \gamma,\ \gamma \supset \delta,\ \alpha \vdash_{HK} \delta$ を示せ．

演繹定理を証明するために，CL-項 $M$ に対して，

$$Nx \rhd_w M$$

となる変数 $x$ を含まない CL-項 $N$ を与える変換である**抽象 (abstraction)** を定義します．

**定義 1.2.8 (抽象)**　$M$ を CL-項，$x$ を変数とする．変数 $x$ を含まない CL-項 $(\lambda^* x.M)$ を以下のように帰納的に定義する：

1. $(\lambda^* x.M) \equiv (\mathsf{K}M)$　($x \notin FV(M)$ のとき)，
2. $(\lambda^* x.x) \equiv \mathsf{I}$　(ただし $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$)，
3. $(\lambda^* x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V)$ ．

本書では上の帰納的定義において，適用できる定義が 2 つ以上あるときは，小さい番号の定義を適用します．たとえば，$(\lambda^* x.yz)$ は定義の 1 を適用すると $\mathsf{K}(yz)$ となり，3 を適用する

と $\mathsf{S}(\lambda^*x.y)(\lambda^*x.z)$ となります．このときは，小さい番号の 1 を適用することとして $\mathsf{K}(yz)$ とします．この約束により，3 に書かなければならない「$x \in FV(UV)$ のとき」という条件を省略することができます．抽象を何回か行うと $(\lambda^*x.(\lambda^*y.(\lambda^*z.M)))$ という表現が出てきます．これを $\lambda^*xyz.M$ と表記します．

▶ **問題 1.2.9** * $\lambda^*xy.xyy$ を求め，$(\lambda^*xy.xyy)xy$ の正規形を求めよ．

> **定理 1.2.10** 任意の項 $M$ に対して，次が成立する：
>
> $$(\lambda^*x.M)x \rhd_w M\ .$$

この定理は $\lambda^*x.M$ の定義から簡単に証明できますので，問題としておきます．この証明のように帰納的定義にしたがって証明する方法を**定義による帰納法**といいます．

▶ **問題 1.2.11** * 定理 1.2.10 を証明せよ．

> **定理 1.2.12（演繹定理）** $x:\alpha, \Gamma \vdash_{HK} M:\beta$ かつ $\Gamma$ に変数 $x$ が現れないならば，
>
> $$\Gamma \vdash_{HK} \lambda^*x.M : \alpha \supset \beta$$
>
> である．

**証明** $\lambda^*x.M$ の定義による帰納法で証明します．

1．$x \notin FV(M)$ ときは，$x:\alpha, \Gamma \vdash_{HK} M:\beta$ において $x:\alpha$ という仮定は余分な仮定であることが容易に分かります．すなわち，このときは

$$\Gamma \vdash_{HK} M:\beta$$

となっています．$\Gamma \vdash_{HK} M:\beta$ を示す推論図を $\Pi$ とします．次の推論図が $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^*x.M : \alpha \supset \beta$ を示しています．

$$\dfrac{\mathsf{K}:\beta \supset \alpha \supset \beta \quad \begin{matrix}\Pi \\ M:\beta\end{matrix}}{\mathsf{K}M : \alpha \supset \beta}$$

2．$M \equiv x$ のときは，$x:\alpha, \Gamma \vdash_{HK} M:\beta$ を示す推論図は

$$x:\beta$$

という形をしており，$\Gamma$ に変数 $x$ が現れないので，$\alpha \equiv \beta$ です．次の推論図が $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^*x.M : \alpha \supset \beta$ を示しています．

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S}:\gamma \supset (\beta \supset \beta \supset \beta) \supset \beta \supset \beta \quad \mathsf{K}:\gamma}{\mathsf{SK}:(\beta \supset \beta \supset \beta) \supset \beta \supset \beta} \qquad \mathsf{K}:\beta \supset \beta \supset \beta}{\mathsf{SKK}:\beta \supset \beta}$$

ただし $\gamma \equiv (\beta \supset (\beta \supset \beta) \supset \beta)$ である．

3．$M \equiv UV$ のときは，$x : \alpha,\ \Gamma \vdash_{HK} M : \beta$ を示す推論図は

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2 \\ U : \gamma \supset \beta & V : \gamma\end{matrix}}{UV : \beta}$$

という形をしています．帰納法の仮定により，$\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.U : \alpha \supset \gamma \supset \beta$ かつ $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.V : \alpha \supset \gamma$ です．それぞれを示す推論図を，$\Pi_3$ と $\Pi_4$ とします．次の推論図が $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.M : \alpha \supset \beta$ を示しています．

$$\dfrac{\dfrac{\mathsf{S} : (\alpha \supset \gamma \supset \beta) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \alpha \supset \beta \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ \lambda^* x.U : \alpha \supset \gamma \supset \beta\end{matrix}}{\mathsf{S}(\lambda^* x.U) : (\alpha \supset \gamma) \supset \alpha \supset \beta} \quad \begin{matrix}\Pi_4 \\ \lambda^* x.V : \alpha \supset \gamma\end{matrix}}{\mathsf{S}(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V) : \alpha \supset \beta}$$

□

ここで

$$\vdash_{HK} \lambda^* xy.xyy : (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$$

であることを演繹定理を使って示してみます．ここで，変数を表すメタ変数 $x, y$ は異なる変数を表しています．

**例 1.2.13**（演繹定理を使った $\vdash_{HK} (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$ の証明）　次の推論図を考えます．

$$\dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{xy : \alpha \supset \beta} \quad y : \alpha}{xyy : \beta}$$

この推論図は $y : \alpha,\ x : \alpha \supset \alpha \supset \beta \vdash_{HK} xyy : \beta$ を示しています．ここで演繹定理を使うと，$x : \alpha \supset \alpha \supset \beta \vdash_{HK} \lambda^* y.xyy : \alpha \supset \beta$ が分かります．さらにもう一度，演繹定理を使えば，目的である $\vdash_{HK} \lambda^* xy.xyy : (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$ が得られます．

**発展（いろいろな抽象）**

定義 1.2.8 で定義された $\lambda^*$ 以外にも定理 1.2.10 が成立する変換があります．そのうちのいくつかをここで紹介します．

**定義 1.2.14**（抽象 $\eta$）　$M$ を CL-項，$x$ を変数とする．変数 $x$ を含まない項 $(\lambda^\eta x.M)$ を以下のように帰納的に定義する：

1. $(\lambda^\eta x.M) \equiv (\mathsf{K}M)$　　$(x \notin FV(M)$ のとき$)$,
2. $(\lambda^\eta x.x) \equiv \mathsf{I}$　（$\mathsf{I}$ を基本的な結合子と考え，変形規則 $\mathsf{I}M \rhd_1 M$ を公理とする），
3. $(\lambda^\eta x.Ux) \equiv U$　　$(x \notin FV(U)$ のとき$)$,
4. $(\lambda^\eta x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^\eta x.U)(\lambda^\eta x.V)$.

▶ **問題 1.2.15** CL-項 $\lambda^\eta xy.xyy$ を求め，$(\lambda^\eta xy.xyy)xy$ の正規形を求めよ ($\lambda^\eta xy.R$ は $(\lambda^\eta x.(\lambda^\eta y.R))$ のことである).

変換 $\lambda^*$ は定義が最も簡単なものです．それに対して，変換 $\lambda^\eta$ は，定義の場合分けが 1 つ増える代わりに，$\lambda^\eta x.M$ の長さが $\lambda^* x.M$ の長さより短く (同じ場合もありますが) なるようになっています．この変換効率の違いは CL-項 $\lambda^* xy.xyy$ を求めてみるとよく分かるでしょう．

変換効率だけでなく変形効率も考えると，次のような変換になります．

**定義 1.2.16 (抽象 $i$)** $M$ を CL-項，$x$ を変数とする．変数 $x$ を含まない項 $(\lambda^i x.M)$ を以下のように帰納的に定義する：

1. $(\lambda^i x.M) \equiv (\mathsf{K}M)$ $(x \notin FV(M)$ のとき$)$,
2. $(\lambda^i x.x) \equiv \mathsf{I}$,
3. $(\lambda^i x.Ux) \equiv U$ $(x \notin FV(U)$ のとき$)$,
4. $(\lambda^i x.UV) \equiv \mathsf{B}U(\lambda^i x.V)$ $(x \notin FV(U)$ のとき$)$,
5. $(\lambda^i x.UV) \equiv \mathsf{C}(\lambda^i x.U)V$ $(x \notin FV(V)$ のとき$)$,
6. $(\lambda^i x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^i x.U)(\lambda^i x.V)$ .

この体系では S, K 以外に B, C, I も基本的な結合子と考え，次の変形規則を公理として加えます (他の公理や推論規則は体系 CLw と同じです).

$$\text{(B)} \quad \mathsf{B}MNR \rhd_1 M(NR)$$
$$\text{(C)} \quad \mathsf{C}MNR \rhd_1 MRN$$
$$\text{(I)} \quad \mathsf{I}M \rhd_1 M$$

▶ **問題 1.2.17** CL-項 $\lambda^i xy.xyy$ を求め，$(\lambda^i xy.xyy)xy$ の正規形を求めよ．また，$M \rhd_1 N$ のとき $M$ が 1 回の変形で $N$ になったと考えることにすると，何回の変形で正規形になったか？ $(\lambda^\eta xy.xyy)xy$ が正規形になる回数と比較してみよ．

いままで述べた方法で，$\lambda x_1 \cdots x_n.M$ を変換すると，最悪の場合，変換後の項の大きさが $n^2$ に比例して大きくなります．David Turner はそれを $n$ に比例する大きさに抑えることができる変換を発見しました．次に述べる変換が Turner による変換です．

**定義 1.2.18 (抽象 $t$)** $M$ を CL-項，$x$ を変数とする．変数 $x$ を含まない項 $(\lambda^t x.M)$ を以下のように帰納的に定義する：

1. $(\lambda^t x.x) \equiv \mathsf{I}$,
2. $(\lambda^t x.MUV) \equiv \mathsf{K}'MUV$ $(M$ が閉項かつ $x \notin FV(UV)$ のとき$)$,

3. $(\lambda^t x.MUV) \equiv \mathsf{B}'MU(\lambda^t x.V)$　($M$ が閉項かつ $x \notin FV(U)$ のとき),
4. $(\lambda^t x.MUV) \equiv \mathsf{C}'M(\lambda^t x.U)V)$　($M$ が閉項かつ $x \notin FV(V)$ のとき),
5. $(\lambda^t x.MUV) \equiv \mathsf{S}'M(\lambda^t x.U)(\lambda^t x.V)$　($M$ が閉項のとき),
6. $(\lambda^t x.MN) \equiv (\lambda^t x.IMN)$,
7. $(\lambda^t x.M) \equiv (\lambda^t x.IIM)$.

この体系では I, K′, B′, C′, S′ を基本的な結合子と考え，次の変形規則を公理として加えます (K, S についての公理はなくなりますが，他の公理や推論規則は体系 CLw と同じです).

$$
\begin{array}{ll}
(\mathsf{I}) & \mathsf{I}M \rhd_1 M \\
(\mathsf{K}') & \mathsf{K}'MNRU \rhd_1 MNR \\
(\mathsf{B}') & \mathsf{B}'MNRU \rhd_1 MN(RU) \\
(\mathsf{C}') & \mathsf{C}'MNRU \rhd_1 M(NU)R \\
(\mathsf{S}') & \mathsf{S}'MNRU \rhd_1 M(NU)(RU)
\end{array}
$$

### 1.2.3　自然推論と直観主義命題論理

演繹定理は非常に便利な定理なので，演繹定理をそのまま推論規則としてもつ体系が考えられないものかと思うでしょう．1930 年代にゲンツェンがそのような体系を考えています．その体系では例 1.2.13 は次のような証明図となります．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{xy : \alpha \supset \beta} \qquad y : \alpha}{xyy : \beta}}{\lambda y.xyy : \alpha \supset \beta}}{\lambda xy.xyy : (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta}
$$

ここで，下から 2 行目の「:」の左側が $\lambda y.M$ という形をしていますが，下から 2 行目と 3 行目の間で使われた推論規則により仮定 $y : \alpha$ が仮定でなくなったことを示しています．変数 $x$ についても同様で，下から 1 行目と 2 行目の間で使われた推論規則により仮定 $x : \alpha \supset \alpha \supset \beta$ が仮定でなくなったことを示しています．その結果，この証明図は仮定なしで式

$$\lambda xy.xyy : (\alpha \supset \alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$$

が証明できることを示しているのです．

公理が全くなくても，演繹定理を形式化して得られる推論規則と MP だけで，古典命題論理 HK の公理型の K と S の論理式は証明できます．公理型 A の論理式については，後で述べる自然な推論規則 ⊥-E を付け加えれば証明することができます．公理型 P の論理式については，それと同等な推論規則を考えることはできるのですが，あまり自然なものではありません．そこで公理型 P を取り除いた論理を考えることにします．そのような論理を**直観主義論理 (intuitionistic logic)** といいます．ヒルベルト流の体系 HK の公理型から公理型 P

を取り除いて得られる直観主義命題論理の体系[2]を HJ とよびます．演繹定理は私たちが普通に行っている推論そのものなので，ゲンツェンはその体系を**自然推論 (natural deduction)** とよんでいます．彼は直観主義論理の自然推論の体系 NJ と古典論理の自然推論の体系 NK とをつくっていますが，NK は NJ に比べて不自然であると感じていました．ここでは体系 NJ だけを提示します．

まず，主部である項の定義をしなければなりません．ヒルベルト流の体系では主部は CL-項でしたが，自然推論の体系の主部は**ラムダ項 (λ-term)** と呼ばれます．「$\lambda^*$」は CL-項を構成する基本記号ではなく，ある条件を満たす CL-項を表現するためのメタな記号でした．一方，「λ」はラムダ項を構成するための基本記号です．定数記号には ‘A’ が含まれているものとします．ラムダ項は次のように帰納的に定義されます．

**定義 1.2.19**（ラムダ項）
1. 変数 (この変数は CL-項の定義に現れる変数と同じもの) と定数記号はラムダ項である (この形のラムダ項を**原子 (atom)** という)，
2. $M$ と $N$ がラムダ項ならば，$(MN)$ はラムダ項である (この形のラムダ項を**適用 (application)** という)，
3. $M$ がラムダ項で $x$ が変数ならば，$(\lambda x.M)$ はラムダ項である (この形のラムダ項を**抽象 (abstraction)** という)．

CL-項のときと同様に括弧を省略します．足りない括弧は左から補ってください．ただし，抽象については一番外側の括弧となっているときだけ省略します．すなわち，$(\lambda x.M)$ は $\lambda x.M$ と省略しますが，$(N(\lambda x.M))$ を $N\lambda x.M$ と省略はしないということです．$\lambda x.MN$ は $(\lambda x.(MN))$ の省略形であり，$((\lambda x.M)N))$ の省略形ではありません．また，$(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.M)))$ は $\lambda xyz.M$ と略します．すなわち，$\lambda xy.xyy$ は $(\lambda x.(\lambda y.((xy)y)))$ を略して書いたものです．項に含まれる変数と定数記号の個数 (同じものがあったら重複して数える) をその項の**長さ (length)** といいます．たとえば，項 $\lambda xy.xyy$ の長さは 5 です．

ラムダ項 $Q$ の中のラムダ項 $\lambda x.M$ の出現において，この $M$ の出現を $\lambda x$ の**作用域 (scope)** といいます．ラムダ項 $Q$ の中の変数 $x$ の出現が**束縛された (bound)** 出現であるとは，その出現が $\lambda x$ の作用域か $\lambda x$ の中にあることです．束縛されていない変数の出現を**自由な (free)** 出現といいます．たとえば，$x(\lambda xy.xz)$ において，最初の $x$ (の出現) は自由で，2 番目と 3 番目の $x$(の出現) は束縛されています．また，$z$ の出現は自由です．すべての変数が束縛されているラムダ項を**閉項 (closed term)** といい，定数を含まない閉項を**結合子 (combinator)** といいます．$\lambda xy.xyy$ は閉項 (で結合子) ですが，$\lambda y.xyy$ は閉項ではありません．

$M$ をラムダ項，$\alpha$ を論理式とするとき，$M:\alpha$ という表現を体系 NJ の**式**といい，$M$ をその式の**主部 (subject)**，$\alpha$ をその式の**述部 (predicate)** といいます．体系 NJ では公理が

2) 前節の発展のところで述べたように，正確には直観主義命題論理の含意否定断片というべきところです．

ないので長さ 1 の証明図を書くことができません．そのために，NJ では推論図が中心的な役割を果たします．NJ の推論図は HJ の推論図と同じように式を木状に並べたものです．NJ の推論図の上端の式のことを**仮定 (assumption)** といいます．次の定義は「推論図」の概念と「仮定が落ちる」という概念を同時に帰納的に定義しています．

**定義 1.2.20（NJ の推論図）**

1. 主部が変数である式が 1 つ書かれている図形は推論図である．
2. 推論図 $\Pi_1$ の一番下に現れる式が $M:\alpha\supset\beta$ で，推論図 $\Pi_2$ の一番下に現れる式が $N:\alpha$ のとき，次の図形は推論図である．

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{(MN):\beta}$$

　このとき，使われた推論規則は ⊃-E であるといい，推論規則は

$$\frac{M:\alpha\supset\beta \quad N:\alpha}{MN:\beta}$$

　と書かれる．

3. 推論図 $\Pi$ の中の落ちていない仮定のうちで主部が変数 $x$ である式の述部は $\alpha$ だけとする (主部が変数 $x$ である式が現れなくてもよい)．また，$\Pi$ の一番下に現れる式が $M:\beta$ であるとする．このとき次の図形は推論図である．

$$\frac{\Pi}{(\lambda x.M):\alpha\supset\beta}$$

　このとき，使われた推論規則は ⊃-I であるといい，推論規則は

$$\frac{\begin{matrix} x:\alpha \\ \Pi \\ M:\beta \end{matrix}}{\lambda x.M:\alpha\supset\beta}$$

　と書かれる．この推論規則を使うまでは落ちていなかった仮定 $x:\alpha$ は (複数個あればすべて)，この推論規則を使った結果，**落ちた (discharged)** という．

4. 一番下に現れる式が $M:\bot$ の推論図を $\Pi$ とし，また $\alpha$ を任意の論理式とする．このとき次の図形は推論図である．

$$\frac{\Pi}{(\mathsf{A}M):\alpha}$$

　このとき，使われた推論規則は ⊥-E であるといい，推論規則は

$$\frac{M:\bot}{\mathsf{A}M:\alpha}$$

　と書かれる．

5. 上の 1, 2, 3, 4 から推論図と分かるものだけが推論図で，それらから落ちたと分かる仮定だけが落ちている．

5 番目の文句は普通は省略されますが，念のために付けておきました．今後は省略します．また，3 番目に括弧の中に出てくる「主部が変数 $x$ である式が現れなくてもよい」という文句も以後は省略します．

推論規則 $\supset$-E と $\bot$-E は**消去規則 (elimination rule)** とよばれています．また，推論規則 $\supset$-I は**導入規則 (introduction rule)** とよばれています．推論規則 $\supset$-E は MP そのものなのですが，自然推論系の体系では推論規則 $\supset$-I と対比させて $\supset$-E とよばれています．推論規則 $\supset$-E の 2 つの前提 $M : \alpha \supset \beta$ と $N : \alpha$ については，$M : \alpha \supset \beta$ は**主前提 (major premiss)** とよばれ，$N : \alpha$ は**副前提 (minor premiss)** とよばれます．また，前提が 1 つしかない推論規則についても，その前提を主前提ということにします．

$\Gamma$ を式の列とします．式 $M : \alpha$ に至る NJ の推論図があり，その落ちていない仮定がすべて $\Gamma$ に含まれるとき，

$$\Gamma \vdash_{NJ} M : \alpha$$

と書き，NJ で仮定 $\Gamma$ から $M : \alpha$ が出るといいます．また，その推論図を $\Gamma$ から $M : \alpha$ に至る推論図といいます．落ちていない仮定はすべて $\Gamma$ に入っていなければいけませんが，落ちてしまった仮定や変数が主部の式ならば，上端にないものが $\Gamma$ に入っていてもかまいません．$\Gamma(\equiv \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を論理式の列，$\beta$ を論理式とします．

$$z_1 : \alpha_1, \cdots, z_n : \alpha_n \vdash_{NJ} M : \beta$$

となる変数 $z_1, \cdots, z_n$ と CL-項 $M$ が存在するとき，

$$\Gamma \vdash_{NJ} \beta$$

と書きます．

$\Gamma$ が空列のとき，すなわち

$$\vdash_{NJ} M : \gamma$$

のとき，それを示す NJ の推論図を式 $M : \gamma$ の (NJ の) **証明図**といいます．このときラムダ項 $M$ は閉項となっています．式 $M : \alpha$ の証明図が存在するとき，$M : \alpha$ は**証明可能 (provable)** である，といいます．また，述部が $\alpha$ である式が証明可能であるとき，論理式 $\alpha$ は**証明可能 (provable)** であるといい，その式の証明図のことを論理式 $\alpha$ の証明図といいます．次の例は HK の公理型 S の論理式の NJ の証明図です．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \beta \supset \gamma \quad z : \alpha}{xz : \beta \supset \gamma} \quad \dfrac{y : \alpha \supset \beta \quad z : \alpha}{yz : \beta}}{xz(yz) : \gamma}}{\lambda z.xz(yz) : \alpha \supset \gamma}}{\lambda yz.xz(yz) : (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma}}{\lambda xyz.xz(yz) : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma}$$

この証明図を省略形で書くと次のようになります．ヒルベルト流の体系 HK のときと同様に，これから上が完全に再現できるということが重要です．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\supset\beta\supset\gamma \quad z:\alpha}{\beta\supset\gamma} \quad \dfrac{y:\alpha\supset\beta \quad z:\alpha}{\beta}}{\gamma}}{\alpha\supset\gamma}\,\lambda z}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\gamma}\,\lambda y}{(\alpha\supset\beta\supset\gamma)\supset(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\gamma}\,\lambda x$$

▶ **問題 1.2.21** * 　次の論理式の NJ の証明図を描け：

1. HK の公理型 K の論理式,
2. HK の公理型 A の論理式,
3. $\neg(\alpha\supset\beta)\supset\neg\neg\alpha$,
4. $((\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\neg\neg\alpha$,
5. $(\alpha\supset\beta\supset\gamma)\supset\beta\supset\alpha\supset\gamma$,
6. $((\alpha\supset\beta)\supset\beta)\supset(\beta\supset\alpha)\supset\neg\neg\alpha$,
7. $\neg\neg(((\alpha\supset\beta)\supset\beta)\supset(\beta\supset\alpha)\supset\alpha)$,
8. $((\alpha\supset\beta)\supset\beta\supset\alpha)\supset\beta\supset\neg\neg\alpha$,
9. $((\alpha\supset\beta)\supset\gamma)\supset(\alpha\supset\gamma)\supset\neg\neg\gamma$.

公理型 K の論理式の証明図では，NJ の推論図では実際にはそこに現れない仮定を落としてもよいことを使います．

体系 HJ と NJ の同等性を証明するために，ラムダ項 $M$ から CL-項 $M_H$ への変換と CL-項 $M$ からラムダ項 $M_\lambda$ 変換を次のように帰納的に定義する．

$$x_H\equiv x,\quad \mathsf{A}_H\equiv\mathsf{A},\quad (MN)_H\equiv M_HN_H,\quad (\lambda x.M)_H\equiv\lambda^*x.M_H.$$

$$x_\lambda\equiv x,\quad \mathsf{A}_\lambda\equiv\lambda x.\mathsf{A}x,\quad \mathsf{K}_\lambda\equiv\lambda xy.x,\quad \mathsf{S}_\lambda\equiv\lambda xyz.xz(yz),\quad (MN)_\lambda\equiv M_\lambda N_\lambda.$$

定理 1.2.12 (演繹定理) は古典論理について述べていますが，直観主義論理でも成り立っていることが容易に分かります．すなわち，定理 1.2.12 において $\vdash_{HK}$ を $\vdash_{HJ}$ に変えても定理は成り立っています．それと $M_H$ の定義による帰納法により次の定理が証明できます．

**定理 1.2.22**　$\Gamma\vdash_{NJ} M:\gamma$ ならば $\Gamma\vdash_{HJ} M_H:\gamma$ である．

この定理の逆は $M_\lambda$ の定義による帰納法で証明できます．

**定理 1.2.23**　$\Gamma\vdash_{HJ} M:\gamma$ ならば $\Gamma\vdash_{NJ} M_\lambda:\gamma$ である．

次の系が HJ と NJ の同等性を述べています．

**系 1.2.24** $\Gamma$ を論理式の列とするとき，次の 2 つの条件は同値である：

1. $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$,
2. $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$.

▶ **問題 1.2.25** * 定理 1.2.22 を証明せよ ($\Gamma \vdash_{NJ} M : \gamma$ のとき $M \equiv \mathsf{A}$ とはならないことに注意せよ).

▶ **問題 1.2.26** * 定理 1.2.23 を証明せよ．

### 1.2.4 ラムダ項の $\beta$-変形

CL-項の weak 変形に対応するラムダ項の変形が **$\beta$-変形 ($\beta$-reduction)** です．CL-項の weak 変形は変形規則そのものは分かりやすいのですが，変形規則だけではその意味が分かりづらいものでした．抽象という概念が定義できて定理 1.2.10 が成り立つような変形だというのが weak 変形の意味です．CL-項の抽象というメタな概念を直接表現できるようにしたのがラムダ項です．以下で定義される代入という概念を使うと，定理 1.2.10 を一般化した $(\lambda x.M)N$ を $[N/x]M$ で置き換えるというのが **$\beta$-変形 ($\beta$-reduction)** です．CL-項に現れる変数 $x$ への項 $M$ の代入という概念は単純で，$x$ を $M$ で置き換えるだけです．しかし，ラムダ項には束縛変数があり，変数 $x$ への代入というのが自由な $x$ への代入なので，正確な定義はやや複雑になります．また，束縛変数の置き換えである **$\alpha$-変換 ($\alpha$-convertion)** も考える必要があります．

代入や $\alpha$-変換などは，きちんとした定義や証明抜きでいいかげんに扱っている本もあります．細かな定義や証明にこだわると大筋がつかめなくなるためそうしているのでしょう．しかし，どこかにきちんとした定義や証明があるので安心していいかげんにできるのです．ここでは定義はきちんとしますが，証明はおおむね読者にゆだねたいと思います．

ラムダ項 $M$ に含まれる変数の集合 $V(F)$，**自由変数 (free variable)** の集合 $FV(M)$ と **束縛変数 (bound variable)** の集合 $BV(M)$ を次のように帰納的に定義します：

$$M \text{ が定数のとき } V(M) = FV(M) = BV(M) = \emptyset,$$

$$V(x) = \{x\}, \quad V(MN) = V(M) \cup V(N), \quad V(\lambda x.M) = V(M) \cup \{x\},$$

$$FV(x) = \{x\}, \quad FV(MN) = FV(M) \cup FV(N), \quad FV(\lambda x.M) = FV(M) - \{x\},$$

$$BV(x) = \emptyset, \quad BV(MN) = BV(M) \cup BV(N), \quad BV(\lambda x.M) = BV(M) \cup \{x\}.$$

たとえば，$M \equiv xv(\lambda yz.yv)y$ とすると，

$$V(M) = \{x, y, z, v\}, \quad FV(M) = \{x, y, v\} \quad \text{かつ} \quad BV(M) = \{y, z\}$$

です．変数 $y$ は自由変数でも束縛変数でもあることに注意してください．

ラムダ項 $M$ の中の変数 $x$ へのラムダ項 $N$ の代入 $[N/x]M$ は，簡単な場合には，$M$ の中の $x$ をすべて $N$ で置き換えれば得られます．一般の場合はもう少し複雑で，次のように

帰納的に定義されます.

**定義 1.2.27 (代入 (substitution))** $M, N$ をラムダ項, $x$ を変数とする. $M$ の中の (自由に現れる) $x$ に $N$ を代入した結果 $[N/x]M$ を次のように帰納的に定義する：

1. $[N/x]x \equiv N$,
2. $[N/x]M \equiv M \quad (x \notin FV(M)$ のとき),
3. $[N/x](QR) \equiv ([N/x]Q\ [N/x]R)$,
4. $[N/x](\lambda y.Q) \equiv \lambda y.[N/x]Q \quad (y \notin FV(N)$ のとき),
5. $[N/x](\lambda y.Q) \equiv \lambda z.[N/x][z/y]Q$. ここで $z$ は $V(N(\lambda xy.Q))$ の中にはない最初の変数である (変数は '$u_0$', '$u_1$', '$u_2$', $\cdots$ の順に並べられている).

▶ **問題 1.2.28 *** 次のラムダ項を求めよ：

1. $[(\lambda x.xy)/x](\lambda y.x(\lambda x.x))$,
2. $[(\lambda x.xz)/y](y(\lambda z.zy))$.

次の代入と自由変数についての補助定理はよく使われます. 証明は代入の定義による帰納法でできます.

**補助定理 1.2.29**

1. $[x/x]M \equiv M$,
2. $x \in FV(M) \Longrightarrow FV([N/x]M) = (FV(M) - \{x\}) \cup FV(N)$ ,
3. $[y/x]M$ の長さは $M$ の長さと同じである,
4. $y, z \notin V(M) \Longrightarrow [z/y][y/x]M \equiv [z/x]M$.

▶ **問題 1.2.30** 補助定理 1.2.29 を証明せよ.

$\beta$-変形を定義するためには束縛変数の置き換えである $\alpha$-変換を定義しなければなりません. 代入を用いてラムダ項の **$\alpha$-変換 ($\alpha$-convertion)** を定義するための体系 $\lambda\alpha$ を記述します. $M$ と $N$ をラムダ項とするとき, $M = N$ という表現が体系 $\lambda\alpha$ の式です. 体系 $\lambda\alpha$ の公理型は次の 1 つです.

$$(\rho) \quad M = M$$

体系 $\lambda\alpha$ の推論規則は次の 2 つです (規則 $\alpha$ は $x \equiv y$ の時も使える).

$$\frac{M = U \quad N = V}{MN = UV}\ (\tau)$$

$$\frac{[z/x]M = [z/y]N}{\lambda x.M = \lambda y.N}\ (\alpha) \qquad (\text{ただし } z \notin V((\lambda x.M)(\lambda y.N)))$$

体系 $\lambda\alpha$ の証明図は体系 CLw と同様に定義します．式 $M = N$ に至る体系 $\lambda\alpha$ の証明図があるとき，

$$\vdash_{\lambda\alpha} M = N \quad \text{または} \quad M \equiv_\alpha N$$

と書き，ラムダ項 $M$ はラムダ項 $N$ と **$\alpha$-同値 ($\alpha$-congruence)** であるといいます．また，ラムダ項をその項と $\alpha$-同値なラムダ項で置き換えることを **$\alpha$-変換**といいます．$\equiv_\alpha$ は束縛変数を置き換えて得られるラムダ項どうしを等しいと見なした同値関係となります．この体系では関係 $\equiv_\alpha$ が同値関係となる (とくに推移的である) ことの証明は意外にむずかしく，いくつかの補助定理を必要とします．この体系は関係 $\equiv_\alpha$ が決定可能であることが容易に示せる体系となっていますので，それをまず示します．

任意にラムダ項 $M, N$ が与えられたとき

$$M \equiv_\alpha N$$

であるかどうかを判定する手続きがあるとき，関係 $\equiv_\alpha$ は決定可能であるといいます．実際，関係 $\equiv_\alpha$ は決定可能です．そのことは以下の 2 つの補助定理を用いて証明できます．次の補助定理は $M \equiv_\alpha N$ を示す証明図から容易に分かります．

**補助定理 1.2.31**　任意のラムダ項 $M, N$ について $M \equiv_\alpha N$ のとき，次が成り立つ：

1. $M$ が原子ならば $M \equiv N$ である，
2. $M$ が適用ならば $N$ も適用である，
3. $M$ が抽象ならば $N$ も抽象である．

次の補助定理の「$\Longleftarrow$」の部分は体系 $\lambda\alpha$ の推論規則から明らかです．「$\Longrightarrow$」の部分は $M \equiv_\alpha N$ を示す証明図の長さについての帰納法で示されます．

**補助定理 1.2.32**　任意のラムダ項 $M, N, Q, R$ および $z \notin V(\lambda xy.MN)$ である任意の変数 $z$ について次が成り立つ (2 は $x \equiv y$ でも成立)：

1. $MN \equiv_\alpha QR \iff M \equiv_\alpha Q$ かつ $N \equiv_\alpha R$,
2. $\lambda x.M \equiv_\alpha \lambda y.N \iff [z/x]M \equiv_\alpha [z/y]N$.

**定理 1.2.33**　体系 $\lambda\alpha$ は決定可能である，すなわち任意のラムダ項 $M, N$ について

$$M \equiv_\alpha N$$

であるかどうか判定する手続きがある．

**証明**　ラムダ項 $M$ の長さに関する帰納法で証明する．

**1.** $M$ の長さが 1 のとき：補助定理 1.2.31 の 1 により $M$ と $N$ が同じ原子 (変数か定数)

であるかどうかを調べればよい．

**2.** $M \equiv M_1M_2$ のとき：補助定理 1.2.31 の 2 により，$M \equiv_\alpha N$ ならばラムダ項 $N$ は $N_1N_2$ という形をしている．また，補助定理 1.2.32 の 1 により，$M_1 \equiv_\alpha N_1$ と $M_2 \equiv_\alpha N_2$ が成立しているかどうかを調べればよいことが分かる．両方とも成立していれば $M \equiv_\alpha N$ であり，片方でも成立していなければ $M \equiv_\alpha N$ ではない．ラムダ項 $M_1, M_2$ ともその長さは $M$ の長さより小さいので，帰納法の仮定により成立しているかどうかを判定できる．

**3.** $M \equiv \lambda x.Q$ のとき：補助定理 1.2.31 の 3 により，$M \equiv_\alpha N$ ならばラムダ項 $N$ は $\lambda y.R$ という形をしている．また，補助定理 1.2.32 の 2 により，$[z/x]Q \equiv_\alpha [z/y]R$ (ただし $z \notin V((\lambda x.Q)(\lambda y.R))$) が成立しているかどうかを調べればよい．ラムダ項 $[z/x]Q$ の長さは $M$ の長さより小さいので，帰納法の仮定により成立しているかどうかを判定できる．　□

$\alpha$-同値の主な性質を補助定理としてまとめておきます (同値関係となることは，$M \equiv_\alpha N$ を示す証明図の長さについての帰納法で証明される)．

**補助定理 1.2.34**

1. $M \equiv_\alpha N \Longrightarrow FV(M) = FV(N)$,
2. 関係 $\equiv_\alpha$ は同値関係 (推移的, 反射的かつ対称的な関係) である,
3. 任意のラムダ項 $M$ に対して次のようなラムダ項 $N$ が存在する：

$$M \equiv_\alpha N \quad \text{かつ} \quad FV(N) \cap BV(N) = \emptyset.$$

▶ **問題 1.2.35** *　$\vdash_{\lambda\alpha} \lambda xy.yx(\lambda z.yz) = \lambda yx.xy(\lambda v.xv)$ を示せ．
(厳密にいうと $\lambda xy.yx(\lambda z.yz)$ はラムダ項ではなくメタ–ラムダ項であるので，体系 $\lambda\alpha$ の証明図を書くのではなくメタ証明図を書くことになる．断りがないときは，変数を表す異なるメタ変数は異なる変数を表しているという約束に基づいて (メタ) 証明図を書く．)

$\alpha$-同値なものを同じものと見なせば，代入の定義 (定義 1.2.27) の $[N/x]$ を $\lambda y$ の中に入れる 2 つの場合を 1 つにまとめることができます．また，変数を並べておく必要もありません．すなわち次が成立します：

$$[N/x](\lambda y.Q) \equiv_\alpha \lambda z.[N/x][z/y]Q \qquad (\text{ただし } z \notin V(\lambda xy.NQ)).$$

このことの証明には次の代入についての補助定理を必要とします．補助定理の証明はラムダ項 $M$ の長さについての帰納法で証明できます．

**補助定理 1.2.36**　任意のラムダ項 $M, N, Q, R$ および任意の変数 $x, y, z$ について次が成り立つ：

1. $z \notin FV(M) \Longrightarrow [Q/z][z/x]M \equiv_\alpha [Q/x]M$,
2. $M \equiv_\alpha N$ かつ $Q \equiv_\alpha R \Longrightarrow [Q/x]M \equiv_\alpha [R/x]N$.

**定理 1.2.37** 任意のラムダ項 $M, N$ および任意の変数 $x, y, z$ について次が成り立つ：

$$z \notin V(\lambda xy.MN) \Longrightarrow [N/x](\lambda y.M) \equiv_\alpha \lambda z.[N/x][z/y]M.$$

▶ **問題 1.2.38** 定理 1.2.37 を証明せよ．

次に $\beta$-変形の体系 $\lambda\beta$ を定義します．$M$ と $N$ をラムダ項とするとき，

$$M \rhd_1 N, \quad M \to_1 N, \quad M \rhd N \quad \text{および} \quad M = N$$

という 4 種類の表現が $\lambda\beta$ の式です．体系 $\lambda\beta$ の公理型は次の 2 つです．

$$(\beta) \quad (\lambda x.M)N \rhd_1 [N/x]M$$
$$(\rho) \quad M \rhd N \qquad (\text{ただし } M \equiv_\alpha N)$$

体系 $\lambda\beta$ の推論規則は次の 8 つです：

$$\frac{N \rhd_1 R}{MN \rhd_1 MR}\,(\mu), \qquad \frac{M \rhd_1 N}{MR \rhd_1 NR}\,(\nu), \qquad \frac{M \rhd_1 N}{\lambda x.M \rhd_1 \lambda x.N}\,(\xi),$$

$$\frac{M \rhd_1 N}{M \to_1 R}\,(\kappa 1) \ \ (\text{ただし } R \equiv_\alpha N), \qquad \frac{M \to_1 N \quad N \rhd R}{M \rhd R}\,(\tau),$$

$$\frac{M \rhd N}{M = N}\,(\kappa), \qquad \frac{M = N}{N = M}\,(\sigma), \qquad \frac{M = N \quad N = R}{M = R}\,(\tau =).$$

体系 $\lambda\beta$ の証明図は，公理である式を上端とする木状の図形です．体系 $\lambda\beta$ についても体系 CLw などと同様に，上端にくる式として公理以外のものを認めたものを推論図ということにします．記法 $\Gamma \vdash_{\lambda\beta} A$ なども CLw と同様に定義します．

▶ **問題 1.2.39 *** 次を示せ．

$$\lambda xy.x \rhd_1 \lambda x.x \vdash_{\lambda\beta} x = y$$

式 $M \rhd_1 N$ が証明できるような項 $N$ が存在しないとき，項 $M$ は **$\beta$-正規形 ($\beta$-normal form)** である，といいます．ラムダ項が $\beta$-正規形であるのは，その中に $(\lambda x.M)N$ という形の部分 (このような部分を **$\beta$-redex** という) をもたないときです．式 $M \rhd N$ が証明でき項 $N$ が $\beta$-正規形のとき，$N$ は $M$ の $\beta$-正規形である ($M$ は $\beta$-正規形 $N$ をもつ)，といいます．

▶ **問題 1.2.40 *** $\beta$-正規形をもたない閉項を見つけよ．

体系 NJ の正規な推論図の主部に現れるラムダ項は $\beta$-正規形です．体系 NJ の正規化定理は，体系 NJ の推論図の主部に現れるラムダ項は $\beta$-正規形をもつことを主張しています．$\beta$-正規形をもたないラムダ項は体系 NJ の推論図の主部に現れません．次の定理の後半は，定

理の前半を使うと体系 CLw のときと同様 (といっても，やや複雑) に証明できます．定理の前半の証明はかなり面倒です．

**定理 1.2.41**　次の 2 つの規則は体系 $\lambda\beta$ の許容規則である．

$$\frac{M \to_1 N}{R \to_1 N}\ (\text{ただし } R \equiv_\alpha M) \qquad \frac{M \rhd N \quad N \rhd R}{M \rhd R}$$

この定理の後半は，「$\rhd$」の推移律が体系 $\lambda\beta$ の許容規則であることを示しています．

▶ **問題 1.2.42**　定理 1.2.41 を証明せよ．

$\vdash_{\lambda\beta} M \rhd_1 N$, $\vdash_{\lambda\beta} M \to_1 N$, $\vdash_{\lambda\beta} M \rhd N$, $\vdash_{\lambda\beta} M = N$ のとき，それぞれを

$$M \rhd_{1\beta} N,\ \ M \to_{1\beta} N,\ \ M \rhd_\beta N,\ \ M =_\beta N$$

と書きます．体系 CLw が CL-項の変形規則を定めているように，体系 $\lambda\beta$ はラムダ項の変形規則を定めています．体系 $\lambda\beta$ が定める変形を $\beta$-変形 (**$\beta$-reduction**) といいます．$=_\beta$ は $\beta$-変形で移りあえる項どうしを等しいと見なした同値関係となります．体系 $\lambda\beta$ についても最も重要な定理は次の Church-Rosser の定理 (合流性定理) です．証明についても体系 CLw のときと同じ[13]を参照してください．

**定理 1.2.43**（$\beta$ 変形の Church-Rosser の定理）　$M \rhd_\beta N$ かつ $M \rhd_\beta R$ ならば次のような項 $T$ が存在する：

$$N \rhd_\beta T \quad \text{かつ} \quad R \rhd_\beta T.$$

この定理と $M =_\beta N$ を示す証明図の長さについての帰納法により，「$=_\beta$」についての次の系を証明することができます．また，$\beta$-正規形の一意性もこの定理から導けます．

**系 1.2.44**　$M =_\beta N$ ならば次のようなラムダ項 $R$ が存在する：

$$M \rhd_\beta R \quad \text{かつ} \quad N \rhd_\beta R.$$

**系 1.2.45**　ラムダ項 $M$ と $N$ がラムダ項 $R$ の $\beta$-正規形ならば $M \equiv_\alpha N$ である．

### 1.2.5　NJ の推論図の変形と正規化定理

次の論理式 $\beta \supset \alpha \supset \alpha$ に至る NJ の証明図を見てください．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\supset\beta\supset\alpha \quad z:\alpha}{xz:\beta\supset\alpha} \quad y:\beta}{xzy:\alpha}}{\lambda z.xzy:\alpha\supset\alpha}}{\lambda yz.xzy:\beta\supset\alpha\supset\alpha}}{\lambda xyz.xzy:(\alpha\supset\beta\supset\alpha)\supset\beta\supset\alpha\supset\alpha} \quad \dfrac{\dfrac{u:\alpha}{\lambda v.u:\beta\supset\alpha}}{\lambda uv.u:\alpha\supset\beta\supset\alpha}}{(\lambda xyz.xzy)(\lambda uv.u):\beta\supset\alpha\supset\alpha}$$

下から 3 行目にすでに $\beta\supset\alpha\supset\alpha$ が現れています．しかし，そこから上を取り出した次の推論図では仮定 $x:\alpha\supset\beta\supset\alpha$ が落ちていないので，証明図にはなっていません．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\supset\beta\supset\alpha \quad z:\alpha}{xz:\beta\supset\alpha} \quad y:\beta}{xzy:\alpha}}{\lambda z.xzy:\alpha\supset\alpha}}{\lambda yz.xzy:\beta\supset\alpha\supset\alpha}$$

そこで，元の証明図の右側にある次の部分

$$\dfrac{\dfrac{u:\alpha}{\lambda v.u:\beta\supset\alpha}}{\lambda uv.u:\alpha\supset\beta\supset\alpha}$$

を上の推論図に $\alpha\supset\beta\supset\alpha$ の部分が重なるように載せ，主部を推論図になるように補正すると，次の推論図が得られます．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{u:\alpha}{\lambda v.u:\beta\supset\alpha}}{\lambda uv.u:\alpha\supset\beta\supset\alpha} \quad z:\alpha}{(\lambda uv.u)z:\beta\supset\alpha} \quad y:\beta}{(\lambda uv.u)zy:\alpha}}{\lambda z.(\lambda uv.u)zy:\alpha\supset\alpha}}{\lambda yz.(\lambda uv.u)zy:\beta\supset\alpha\supset\alpha}$$

この図形は論理式 $\beta\supset\alpha\supset\alpha$ に至る NJ の証明図になっています．一般に，推論図 $\Pi$ の中で，ある論理式の出現が推論規則 $\supset$-I の結論になっていて，しかも推論規則 $\supset$-E の主前提にもなっているとき，その論理式 (の出現) を $\Pi$ の**極大論理式 (maximum formula)** といいます．いまの例では，極大論理式が下から 2 行目の $(\alpha\supset\beta\supset\alpha)\supset\beta\supset\alpha\supset\alpha$ で，この極大論理式を取り除く変形をしたのです．極大論理式を取り除くこのような変形を**推論図の $\beta$-変形**といいます．また，最後の式の主部も $(\lambda xyz.xzy)(\lambda uv.u)$ から $\lambda yz.(\lambda uv.u)zy\equiv[\lambda uv.u/x]\lambda yz.xzy$ に変わっています．この新たに得られた証明図の下から 5 行目に極大論理式 $\alpha\supset\beta\supset\alpha$ があるので，同じような変形を行うことができて，次の証明図が得られます．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z:\alpha}{\lambda v.z:\beta\supset\alpha} \quad y:\beta}{(\lambda v.z)y:\alpha}}{\lambda z.(\lambda v.z)y:\alpha\supset\alpha}}{\lambda yz.(\lambda v.z)y:\beta\supset\alpha\supset\alpha}$$

さらに，この証明図にも下から 4 行目に極大論理式 $\beta \supset \alpha$ があるので，同じような変形をすることができ，次の証明図になります．

$$\cfrac{\cfrac{z : \alpha}{\lambda z.z : \alpha \supset \alpha}}{\lambda yz.z : \beta \supset \alpha \supset \alpha}$$

この非常に簡単な証明図はもう極大論理式がないので，いままでのような変形をすることはできません．極大論理式をもたない推論図のことを**正規な (normal)** 推論図といいます．ある推論図から出発して上のような変形を繰り返して正規な推論図が得られたとします．そのとき，その正規な推論図を元の推論図の**正規形 (normal form)** といいます．正規化定理は，どのような推論図から出発しても上のような変形を繰り返せば正規な推論図が得られるというものです．

最後の式の主部に注目すると，次のような変化をしています：

$$(\lambda xyz.xzy)(\lambda uv.u) \;\Rightarrow\; [\lambda uv.u/x](\lambda yz.xzy) \equiv \lambda yz.(\lambda uv.u)zy$$
$$\Rightarrow\; \lambda yz.[z/u](\lambda v.u)y \equiv \lambda yz.(\lambda v.z)y \;\Rightarrow\; \lambda yz.[y/v]z \equiv \lambda yz.z.$$

最後に得られたラムダ項 $\lambda yz.z$ は最初のラムダ項 $(\lambda xyz.xzy)(\lambda uv.u)$ の $\beta$-正規形になっています．前節の演習問題にあるように正規形をもたないラムダ項が存在しますが，推論図の主部として表れるラムダ項については，そのラムダ項から出発して $\beta$-変形を繰り返せば $\beta$-正規なラムダ項が得られるという正規化定理が成り立ちます．正規化定理の証明の前に，束縛変数の書き換えについての注意をしておきます．

次の $\alpha \supset \beta$ に至る推論図を見てください．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x : \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{xy : \beta}}{\lambda y.xy : \alpha \supset \beta}}{\lambda xy.xy : (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta} \quad \cfrac{y : \beta}{\lambda x.y : \alpha \supset \beta}}{(\lambda xy.xy)(\lambda x.y) : \alpha \supset \beta}$$

下から 2 行目の $(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \beta$ が極大論理式ですので，いままでのような変形を行うと次のようになります．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{y : \beta}{\lambda x.y : \alpha \supset \beta} \quad y : \alpha}{(\lambda x.y)y : \beta}}{\lambda y.(\lambda x.y)y : \alpha \supset \beta}$$

この図形は最後に推論規則 $\supset$-I が使われているように見えますが，落ちていない仮定で主部が変数 $y$ の式の述部が $\alpha$ だけでなく $\beta$ もそうです．その結果，推論規則 $\supset$-I は正しく使われていないので，この図形は推論図になっていません．この問題を解決するためには次のように考えます．

一般に，推論図において落とされた仮定の主部の変数 (の出現) を**束縛**された出現といいます．束縛されていない変数の出現のことを**自由**な出現といいます．変形する前の推論図では，

左の方の $x:\alpha\supset\beta$ の $x$ と $y:\alpha$ の $y$ が束縛されていて，右の方の $y:\beta$ の $y$ は自由です．変数 $y$ についておかしなことが起こっているので，束縛されている $y$ を $z$ に変えます．その結果，次の推論図が得られます．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\supset\beta \quad z:\alpha}{xz:\beta}}{\lambda z.xz:\alpha\supset\beta}}{\lambda xz.xz:(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta} \quad \dfrac{y:\beta}{\lambda x.y:\alpha\supset\beta}}{(\lambda xz.xz)(\lambda x.y):\alpha\supset\beta}$$

このように束縛された変数を書き換えることを推論図の**$\alpha$-変換**といいます．仮定の主部の変数はその仮定がどこで落とされたかを知るためのものなので，$\alpha$-変換して得られた推論図は元の推論図と同じものと考えられます．いま $\alpha$-変換して得られた推論図から極大論理式を取り除く変形をすると，次の推論図が得られます．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{y:\beta}{\lambda x.y:\alpha\supset\beta} \quad z:\alpha}{(\lambda x.y)z:\beta}}{\lambda z.(\lambda x.y)z:\alpha\supset\beta}$$

このようにすると正しく極大論理式を取り除くことができます．$\beta$-変形により自由な変数 (この例の場合は '$y$') には変化がないことに注意してください．

推論図の $\beta$-変形の定義をするために必要な推論図の合成法について述べます．

**推論図の合成**

$\Pi_1$ と $\Pi_2$ を推論図とします．$\Pi_2$ の結論を $M:\alpha$ とします．推論図 $\Pi_1$ の自由な変数 $x$ を主部にもつ式の述部はすべて $\alpha$ であるとします．$\Pi_1$ に自由に現れるすべての $x$ を ($M$ に自由に現れる変数が $\Pi_1$ にそのまま代入すると束縛されてしまうときは，$\Pi_1$ を $\alpha$-変換してから) $M$ で置き換えて得られる図形を $[M/x]\Pi_1$ と書きます．上端に現れる式の主部が変数になるとは限らないので，$[M/x]\Pi_1$ は推論図になるとは限りません．図形 $[M/x]\Pi_1$ 上端に現れるすべての $M:\alpha$ の上に推論図 $\Pi_2$ を下端の $M:\alpha$ が重なるように乗せて得られる推論図を

$$\begin{array}{c}\Pi_2\\ [M/x]\Pi_1\end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{c}\Pi_2\\ M:\alpha\\ [M/x]\Pi_1\end{array}$$

と書きます．先ほどの例でいうと，$\Pi_1, \Pi_2$ を以下のようにおきます：

$$\Pi_1 \equiv \dfrac{\dfrac{x:\alpha\supset\beta \quad y:\alpha}{xy:\beta}}{\lambda y.xy:\alpha\supset\beta}, \qquad \Pi_2 \equiv \dfrac{y:\beta}{\lambda x.y:\alpha\supset\beta}.$$

このとき $\Pi_1$ に必要な $\alpha$-変換 ($y$ を $z$ に変えている) を施して以下のようになります：

$$[\lambda x.y/x]\Pi_1 \equiv \dfrac{\dfrac{\lambda x.y : \alpha \supset \beta \quad z : \alpha}{(\lambda x.y)z : \beta}}{\lambda z.(\lambda x.y)z : \alpha \supset \beta}\ .$$

そして

$$\begin{array}{c}\Pi_2 \\ [\lambda x.y/x]\Pi_1\end{array}$$

は次の推論図を表しています：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{y : \beta}{\lambda x.y : \alpha \supset \beta} \quad z : \alpha}{(\lambda x.y)z : \beta}}{\lambda z.(\lambda x.y)z : \alpha \supset \beta}\ .$$

$[\lambda x.y/x]\Pi$ を描くとき，$\Pi$ に束縛された変数 $x$ が現れるときは，そこには $\lambda x.y$ を代入しないように注意してください．たとえば，

$$\Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{xy : \beta}}{\lambda x.xy : (\alpha \supset \beta) \supset \beta} \quad \dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{xy : \beta}}{\lambda y.xy : \alpha \supset \beta}}{(\lambda x.xy)(\lambda y.xy) : \beta}$$

のときは

$$[\lambda x.y/x]\Pi \equiv \dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \alpha \supset \beta \quad y : \alpha}{xy : \beta}}{\lambda x.xy : (\alpha \supset \beta) \supset \beta} \quad \dfrac{\dfrac{\lambda x.y : \alpha \supset \beta \quad z : \alpha}{(\lambda x.y)z : \beta}}{\lambda z.(\lambda x.y)z : \alpha \supset \beta}}{(\lambda x.xy)(\lambda z.(\lambda x.y)z) : \beta}$$

となります．

**定義 1.2.46（NJ の推論図の $\beta$-変形）** NJ の推論図の中に現れる次のような部分

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}x : \alpha \\ \Pi_1 \\ M : \beta\end{array}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta} \quad \begin{array}{c}\Pi_2 \\ N : \alpha\end{array}}{(\lambda x.M)N : \beta}$$

を

$$\begin{array}{c}\Pi_2 \\ N : \alpha \\ [N/x]\Pi_1 \\ [N/x]M : \beta\end{array}$$

に変えることを，極大論理式 $\alpha \supset \beta$ での $\beta$-変形 (**$\beta$-reduction**) という．また，変形

前の推論図において，部分推論図 $\Pi_2$ のことを**横繫がり (side-connected with)** 推論図という．

この定義で便宜的に $[N/x]M$ と書かれているものは，厳密にいうと，前節で定義された代入 $[N/x]M$ とは異なっている場合があります．前節で定義された $[N/x]M$ から $\alpha$-変換して得られるものとなっています．元の推論図が $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ を示しているときには，$\beta$-変形により得られた推論図も $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ を示していることに注意してください．

**定理 1. 2. 47（NJ の正規化定理（Normalization theorem for NJ））** NJ の推論図は何回かの $\beta$-変形を行うことにより正規形にすることができる．

**証明** 推論図に含まれる極大論理式の中で最も長いものの長さを $l$ とします．また，推論図に含まれる長さ $l$ の極大論理式の個数を $n$ とします．$l$ と $n$ に関する二重帰納法で証明します．

推論図の中から長さ $l$ の極大論理式でその横繫がり推論図には長さ $l$ の極大論理式がないものを選びます．その極大論理式 ($\alpha \supset \beta$ とします) での $\beta$-変形を行います．その結果得られる推論図では，新たに $\alpha$ が極大論理式となる可能性がありますが，長さ $l$ の極大論理式の数は $n-1$ に減ります．帰納法の仮定により，この推論図は何回かの $\beta$-変形を行うことにより正規形にすることができます． □

推論図の正規形が必ずあることが分かりましたが，1 つの推論図の正規形が 2 つ以上あることがあるでしょうか．これについては，推論図の $\beta$-変形についても系 1.2.45 と同様な定理が成立するので，$\alpha$-変換で得られるものを同一視すると，推論図の正規形は 1 つしかありません．上の証明では，特別な極大論理式に注目して $\beta$-変形をしていますが，どの極大論理式での $\beta$-変形をしてもやがて正規形に到達することも知られています．この結果は**強正規化定理 (Strong normalization theorem)** とよばれています．これらのことを詳しく知りたい人は [13]や[12]を見てください．

▶ **問題 1. 2. 48 *** 次の (省略形の) 推論図の正規形を求めよ．途中経過も書くこと．また，必要最小限の $\alpha$-変換をすること．

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y:\alpha}{\alpha\supset\alpha}\,\lambda y}{\beta\supset\alpha\supset\alpha}\,\lambda x \qquad y:\beta}{\alpha\supset\alpha} \qquad x:\alpha}{\alpha}}{\beta\supset\alpha}\,\lambda y}{\alpha\supset\beta\supset\alpha}\,\lambda x \qquad y:\alpha}{\beta\supset\alpha}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\supset\beta\quad y:\alpha}{\beta}}{\alpha\supset\beta}\,\lambda y}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,\lambda x\quad y:\alpha\supset\beta}{\alpha\supset\beta}\quad x:\alpha}{\beta}}{(\alpha\supset\beta)\supset\beta}\,\lambda y}{\alpha\supset(\alpha\supset\beta)\supset\beta}\,\lambda x\quad y:\alpha}{(\alpha\supset\beta)\supset\beta}$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta\quad y:\alpha\supset\beta}{\alpha\supset\beta}}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,\lambda y}{((\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta)\supset(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,\lambda x\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\alpha\supset\beta\quad y:\alpha}{\beta}}{\alpha\supset\beta}\,\lambda y}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}\,\lambda x}{(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\beta}$$

4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z:\alpha\supset\beta\supset\gamma\quad y:\alpha}{\beta\supset\gamma}\quad x:\beta}{\gamma}}{\alpha\supset\gamma}\,\lambda y}{\beta\supset\alpha\supset\gamma}\,\lambda x\quad \dfrac{x:\alpha\supset\beta\quad y:\alpha}{\beta}}{\alpha\supset\gamma}\quad u:\alpha}{\gamma}$$

5.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:(\beta\supset\gamma)\supset\delta\supset\gamma\quad \dfrac{z:\alpha\supset\beta\supset\gamma\quad y:\alpha}{\beta\supset\gamma}}{\delta\supset\gamma}}{\alpha\supset\delta\supset\gamma}\,\lambda y}{((\beta\supset\gamma)\supset\delta\supset\gamma)\supset\alpha\supset\delta\supset\gamma}\,\lambda x\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{x:\beta\supset\gamma\quad y:\beta}{\gamma}}{\delta\supset\gamma}\,\lambda z}{(\beta\supset\gamma)\supset\delta\supset\gamma}\,\lambda x}{\alpha\supset\delta\supset\gamma}$$

### 1.2.6　ゲンツェン流の体系 LK

ヒルベルト流の体系では，ある論理式が証明できるかどうかが簡単には分かりません．その論理式が証明できる場合は，試行錯誤で証明図を見つければいいのですが，証明できない場合は全くお手上げです．自然推論の体系はヒルベルト流の体系よりは証明図を見つけやすくなっていますが，古典論理では二重否定の除去のような変則的な規則を付け加えなければなりません．このような問題を見事に解決したのがゲンツェンの**推件式 (sequent)**[3)] による方法です．1930 年代にゲンツェンは LK および LJ という体系をつくり，論理学の中でも最

3)　'推件式' という訳語は[9]から借用した．

も美しい定理といわれているゲンツェンの基本定理を証明しました．その基本定理を使うと，与えられた命題論理式がその体系で証明できなければ，証明できないことを示すことができるのです．古典命題論理に限れば，彼の方法以前にも決定方法は知られていました．彼の方法のすばらしいところは，種々の命題論理の決定方法に適用できることです．

前節で述べた自然推論とその正規化定理は，直観主義論理については良い見通しを与えます．しかし，古典論理に対する自然推論はあまり良い体系ではありません．ゲンツェンは，自然推論を経て，古典論理の性質を調べるのに最も適した体系として LK を考え出したのです．彼の論文では基本定理を直接証明していますが，最初に考え付いた証明は自然推論の正規化定理を使ったものだったようです．

まず，推件式の定義からはじめます．

**定義 1.2.49（推件式）** $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_n$ を論理式とするとき，

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \beta_1, \cdots, \beta_n$$

の形の表現を推件式という．このとき，論理式の列 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ をこの推件式の前件 **(antecedent)** といい，論理式の列 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ をこの推件式の後件 **(succedent)** という．

推件式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \beta_1, \cdots, \beta_n$ は論理式

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \supset (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n)$$

と同じ意味を表わしています．もし前件が全くない場合 (すなわち，$m = 0$ のとき) は，論理式

$$\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n$$

と同じ意味になります．もし後件が全くない場合 (すなわち，$n = 0$ のとき) は，論理式

$$\neg(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m)$$

と同じ意味になります．また，前件も後件も全くない場合は

$$\bot \qquad \text{(すなわち偽命題)}$$

を意味しています．$m$ を列 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ の長さ **(length)** といいます．

ヒルベルト流の体系では公理は式でしたが，ゲンツェン流の体系での公理は推件式です．また，ヒルベルト流の体系での証明図は式を木状に並べたものでしたが，ゲンツェン流の体系での証明図は推件式を木状に並べたものです．

以下では，ギリシャ文字の大文字 $\Gamma$, $\Delta$, $\Theta$, $\Lambda$ は論理式の有限列 (空列も含む) を表しています．

ゲンツェン流の古典命題論理 LK の公理型は次の 2 つです．

$$(I) \quad \alpha \to \alpha$$
$$(N) \quad \bot \to \Theta$$

公理型のなかのメタ変数に具体的な論理式を代入すると公理が得られます．ゲンツェン流の体系では，公理のことを**始式 (initial sequent)** ともいいます．

ゲンツェン流の古典命題論理 LK の推論規則は全部で 9 つあり，構造に関するものと論理記号に関するものとに大きく分類されています．構造に関するものが 7 つ，論理記号に関するものが 2 つあります．このように，論理記号に関する推論規則が少なくて済んでいるのは，基本的な論理記号として '⊃' と '⊥' しか使っていないおかげです．

**構造に関する推論規則**

**割増 (weakening)**

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\alpha, \Gamma \to \Theta}\ (w \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \alpha}\ (\to w)$$

**縮約 (contraction)**

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \Theta}{\alpha, \Gamma \to \Theta}\ (c \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha, \alpha}{\Gamma \to \Theta, \alpha}\ (\to c)$$

**交換 (exchanging)**

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \to \Theta}\ (e \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha, \beta, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \beta, \alpha, \Lambda}\ (\to e)$$

**切断 (cut)**

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \alpha, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ (\text{cut})$$

**論理記号に関する推論規則**

**⊃ に関する規則**

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \to \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ (\supset\to) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \Theta, \beta}{\Gamma \to \Theta, \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)$$

推論規則の上式と下式で, $\Gamma$, $\Theta$, $\Delta$, $\Lambda$ に現れる論理式 (の出現) を**パラメータ (parameter)**, そうでない論理式 (の出現) については下式に現れるものを**主論理式 (principal formula)**, それに対応して上式に現れる主論理式の部分論理式を**副論理式 (side formula)** といいいます．たとえば，推論規則 $(w \to)$, $(\to w)$ では，主論理式は $\alpha$ で，副論理式はなく，$(c \to)$, $(\to c)$ では，主論理式は $\alpha$ で，副論理式は上式の 2 つの $\alpha$ です．推論規則 $(\to\supset)$ では，主論理式は $\alpha \supset \beta$ で，副論理式は $\alpha$ と $\beta$ です．

**例 1.2.50**　この例は推件式 $\to (p_1 \supset p_2) \supset (p_0 \supset p_1) \supset p_0 \supset p_2$ に至る LK の証明図です．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0 \to p_0 \qquad \dfrac{\dfrac{p_1 \to p_1 \quad p_2 \to p_2}{p_1 \supset p_2, p_1 \to p_2}\,(\supset\to)}{p_1, p_1 \supset p_2 \to p_2}\,(e\to)}{p_0 \supset p_1, p_0, p_1 \supset p_2 \to p_2}\,(\supset\to)}{p_0, p_0 \supset p_1, p_1 \supset p_2 \to p_2}\,(e\to)}{p_0 \supset p_1, p_1 \supset p_2 \to p_0 \supset p_2}\,(\to\supset)}{p_1 \supset p_2 \to (p_0 \supset p_1) \supset p_0 \supset p_2}\,(\to\supset)}{\to (p_1 \supset p_2) \supset (p_0 \supset p_1) \supset p_0 \supset p_2}\,(\to\supset)$$

推件式 $\Gamma \to \Theta$ に至る証明図のことを $\Gamma \to \Theta$ の証明図といいます．推件式 $\Gamma \to \Theta$ のことをその証明図の**終式 (end sequent)** といいます．また，推件式 $\Gamma \to \Theta$ の証明図が存在するとき，$\Gamma \to \Theta$ は**証明可能 (provable)** である，といいます．

ヒルベルト流の体系のときと同様に，例 1.2.50 において命題変数 $p_0, p_1, p_2$ にそれぞれメタ変数 $\alpha, \beta, \gamma$ を代入した図形

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \alpha \qquad \dfrac{\dfrac{\beta \to \beta \quad \gamma \to \gamma}{\beta \supset \gamma, \beta \to \gamma}\,(\supset\to)}{\beta, \beta \supset \gamma \to \gamma}\,(e\to)}{\alpha \supset \beta, \alpha, \beta \supset \gamma \to \gamma}\,(\supset\to)}{\alpha, \alpha \supset \beta, \beta \supset \gamma \to \gamma}\,(e\to)}{\alpha \supset \beta, \beta \supset \gamma \to \alpha \supset \gamma}\,(\to\supset)}{\beta \supset \gamma \to (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma}\,(\to\supset)}{\to (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma}\,(\to\supset)$$

を考えます．この図形はメタ変数 $\alpha, \beta, \gamma$ を含んでいるので証明図そのものではありません．しかし，$\alpha, \beta, \gamma$ にどんな論理式を代入しても証明図になります．このことから，任意の論理式 $\alpha, \beta, \gamma$ に対して推件式

$$\to (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$$

が証明可能であることが分かります．このことを単に，推件式 $\to (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$ が証明可能である，といいます．この図形のことを $\to (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$ の証明図といいます．また $\to (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma$ のような式をメタ推件式といいます．論理式のときと同様な理由で，メタ推件式のことを単に推件式ということもよくあります．推件式 $\to \alpha$ が LK で証明可能なとき，論理式 $\alpha$ は LK で証明可能であるといいます．

▶ **問題 1.2.51** * ヒルベルト流の体系の公理型 K, S, P, A の述部が LK で証明可能であることを示せ．

### 1.2.7　ゲンツェン流の体系 LJ

古典命題論理のヒルベルト流の体系 HK とゲンツェン流の体系 LK との同値性を示したいのですが，これが存外むずかしいのです．その原因は，ヒルベルト流だと公理型 P にあり，ゲンツェン流だと推件式の後件として複数の論理式を認めているところにあります．そこで，そのような原因となるものを取り除いた体系を考え，それらの同値性を示します．むずかし

くなる要因を取り除いた論理は，自然推論のところで出てきた直観主義論理そのものです．直観主義論理のヒルベルト流の体系 HJ は，古典論理の体系 HK から公理型 P を取り除くことによって得られました．ゲンツェン流の体系では，古典論理の体系 LK において，推件式の定義を，後件は 1 つの論理式からなる，と制限すると直観主義論理の体系 LJ[4] が得られます．体系 LJ の公理型と推論規則を以下に述べます．

ゲンツェン流の直観主義命題論理 LJ の公理型は次の 2 つです．

$$(I) \quad \alpha \to \alpha$$
$$(N) \quad \bot \to \alpha$$

ゲンツェン流の直観主義命題論理 LJ の推論規則は全部で 6 つあります．構造に関するものが 4 つ，論理記号に関するものが 2 つあります．

**構造に関する推論規則**

**割増 (weakening)**

$$\frac{\Gamma \to \gamma}{\alpha, \Gamma \to \gamma}\ (w \to)$$

**縮約 (contraction)**

$$\frac{\alpha, \alpha, \Gamma \to \gamma}{\alpha, \Gamma \to \gamma}\ (c \to)$$

**交換 (exchanging)**

$$\frac{\Delta, \alpha, \beta, \Gamma \to \gamma}{\Delta, \beta, \alpha, \Gamma \to \gamma}\ (e \to)$$

**切断 (cut)**

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \Delta \to \gamma}\ (\mathrm{cut})$$

**論理記号に関する推論規則**

**⊃ に関する規則**

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta, \Delta \to \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \gamma}\ (\supset\to) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)$$

▶ **問題 1.2.52** *

1. ヒルベルト流の体系の公理型 K, S, A の述部が LJ で証明可能であることを示せ．
2. 次の論理式がすべて LJ で証明可能であることを示せ：

$$\neg(\alpha \supset \beta) \supset \neg\neg\alpha, \qquad ((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha,$$

4)　正確には $\mathrm{LJ}_{\{\supset,\bot\}}$ というべきものです．

$$\neg\neg(((\alpha \supset \beta) \supset \beta) \supset (\beta \supset \alpha) \supset \alpha), \qquad ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \neg\neg\alpha,$$
$$((\alpha \supset \beta) \supset \beta \supset \alpha) \supset \beta \supset \alpha, \qquad ((\alpha \supset \beta) \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\gamma,$$
$$\neg(((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha) \supset \alpha \supset \beta, \qquad \neg\neg(((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha).$$

本節の目標は次の定理ですが，証明の詳細は読者に委ねます．

**定理 1.2.53**　$\Gamma$ を論理式の列とするとき，次の 3 つの条件は同値である：

1. $\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明可能である，
2. $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$,
3. $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$.

定理 1.2.53 は次のように証明します．2 と 3 が同値であることは系 1.2.24 そのものです．2 から 1 が導かれることは，$\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$ を示す HJ の推論図の長さについての帰納法で証明します．1 から 3 が導かれることは，$\Gamma \to \gamma$ に至る LJ の証明図の長さについての帰納法で証明します．

▶ **問題 1.2.54**＊　定理 1.2.53 を証明せよ．

**派生規則**

まず，ゲンツェン流の体系に対する推論図を定義します．ゲンツェン流の体系の証明図は公理である推件式を上端とする木状の図形でした．ここでも，上端にくる推件式として公理以外のものを認めたものを**推論図 (deduction)** ということにします．

**例 1.2.55**　この例は $\alpha \supset \beta,\ \Gamma \to \Theta$ に至る LK の推論図です．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \beta, \Gamma \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Gamma \to \Theta, \Theta}\ (\supset\to)}{\alpha \supset \beta, \Gamma \to \Theta, \Theta}\ \text{何回かの}\ (e\to)(c\to)}{\alpha \supset \beta, \Gamma \to \Theta}\ \text{何回かの}\ (\to e)(\to c)$$

$\mathcal{A}$ を推件式の列とします．$\mathcal{A}$ に含まれる推件式を上端とし，推件式 $T$ に至る LS (S は K か J です) の推論図があるとき，

$$\mathcal{A} \vdash_{LS} T$$

と書くことにします．ただし，$\mathcal{A}$ には LS の公理は含めなくてもよいものとします．公理以外で上端にあるものはすべて $\mathcal{A}$ に入っていなければいけません．また，実際に上端にない推件式が $\mathcal{A}$ に入っていてもかまいません．例 1.2.55 からは

$$\Gamma \to \Theta,\ \alpha;\ \beta,\ \Gamma \to \Theta \vdash_{LK} \alpha \supset \beta,\ \Gamma \to \Theta$$

が分かります．ここで，推件式の列の区切り記号として‘,’を使ったのでは分かりづらいの

で‘;’を使っています．

$S_1 ; \cdots ; S_n$ を推件式の列とします．

$$S_1 ; \cdots ; S_n \vdash_{LS} T$$

のとき，規則

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_n}{T}$$

を LS の**派生規則 (derivable rule)** といいます．例 1.2.55 は

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \beta, \Gamma \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma \to \Theta}$$

が LK の派生規則であることを示しています．LS の派生規則を LS に付け加えても証明できる推件式は増えませんので，与えられた推件式が LS で証明できることを示すときに，LS の派生規則も使ってよいことになります．本書では，派生規則も使用している証明図や推論図のような図形をそれぞれ**広義の証明図**，**広義の推論図**ということにします．よく使われる派生規則を列挙しておきます．

**LJ でも LK でも派生規則となっているもの**

構造に関する派生規則

**集合 (set)**　LJ では $\Theta$ は 1 つの論理式からなる．

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\Delta \to \Theta} \ (s \to),$$

ここで，論理式の列 $\Gamma$ と $\Delta$ が論理式の集合としては互いに等しい (たとえば，$\Gamma$ が列 $\alpha, \alpha, \beta, \gamma$ で $\Delta$ が列 $\beta, \gamma, \alpha$ のとき) ものとする．

**LK の派生規則**

構造に関する派生規則

**集合 (set)**

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Lambda} \ (\to s),$$

ここで，論理式の列 $\Theta$ と $\Lambda$ が論理式の集合としては互いに等しいものとする．

論理記号に関する推論規則

$\supset$ に関する規則

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \beta, \Gamma \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Gamma \to \Theta} \ (\supset\to *)$$

$\neg$ に関する規則

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \to \Theta} \ (\neg \to) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg\alpha} \ (\to \neg)$$

$\wedge$ に関する規則

$$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \to \Theta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \Theta} (\wedge \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha \quad \Gamma \to \Theta, \beta}{\Gamma \to \Theta, \alpha \wedge \beta} (\to \wedge)$$

$\vee$ に関する規則

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Theta \quad \beta, \Gamma \to \Theta}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \Theta} (\vee \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \alpha, \beta}{\Gamma \to \Theta, \alpha \vee \beta} (\to \vee)$$

$(s \to)$ と $(\to s)$ が派生規則であることは明らかでしょう．また，すでに規則 $(\supset\to *)$ が LK の派生規則であることは示してあります．ここでは，それらの結果を使って規則 $(\vee \to)$ が LK の派生規則であることを示してみましょう．次の広義の推論図がそれを示しています：

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\alpha, \Gamma \to \Theta}{\alpha, \Gamma \to \Theta, \beta} (\to w)}{\Gamma \to \Theta, \alpha \supset \beta} (\to\supset) \qquad \beta, \Gamma \to \Theta}{(\alpha \supset \beta) \supset \beta, \Gamma \to \Theta} (\supset\to *).$$

▶ **問題 1.2.56**

1. 規則 $(\neg \to)$ と $(\to \neg)$ が LK の派生規則であることを示せ．
2. 規則 $(\wedge \to)$, $(\to \wedge)$, $(\to \vee)$ が LK の派生規則であることを示せ．

### 1.2.8 グリベンコの定理および HK と LK の同等性

本節の目標は，ヒルベルト流の体系 HK とゲンツェン流の体系 LK との同値性を示している次の定理です．

**定理 1.2.57** $\Gamma$ を論理式の列とするとき，次の 2 つの条件は同値である：
1. $\Gamma \to \gamma$ が LK で証明可能である，
2. $\Gamma \vdash_{HK} \gamma$.

この定理の 2 から 1 は，$\Gamma \vdash_{HK} \gamma$ を示す推論図の長さに関する帰納法で普通に証明できます．しかし，1 から 2 の証明は容易ではありません．直接証明する方法もありますが，ここではグリベンコ (Glivenko) の定理と直観主義論理の体系 HJ と LJ との同値性を使った証明を与えます．以下では，$\Delta$ を論理式の列 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ とするとき，$\neg\Delta$ により論理式の列 $\neg\delta_1, \cdots, \neg\delta_n$ を表します．$\Delta$ が空列のときは $\neg\Delta$ も空列を表します．

**定理 1.2.58（グリベンコの定理）** 次の 2 つの条件は同値である：
1. $\Gamma \to \Delta$ が LK で証明可能である，
2. $\neg\Delta, \Gamma \to \bot$ が LJ で証明可能である．

**証明**　2 ⇒ 1：　$\Delta$ に含まれる論理式の数に関する帰納法で証明します．

$\Delta$ が空のときは，LJ の証明図は LK の証明図でもあるので $\Gamma \to \bot$ が LK で証明可能です．よって，公理 $\bot \to$ と切断により $\Gamma \to$ が LK で証明可能となります．

$\Delta$ を $\Sigma, \delta$ とします．推件式 $\neg\Sigma,\ \neg\delta,\ \Gamma \to \bot$ が LJ で証明可能なので，帰納法の仮定により $\neg\delta,\ \Gamma \to \Sigma$ が LK で証明可能です．$\neg\delta,\ \Gamma \to \Sigma$ に至る LK の証明図を $\Pi$ とします．次の証明図が $\Gamma \to \Delta$ に至る LK の証明図です．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta \to \delta}{\delta \to \delta, \bot}\ (\to w)}{\to \delta, \neg\delta}\ (\to\supset) \qquad \begin{array}{c}\Pi \\ \neg\delta, \Gamma \to \Sigma\end{array}}{\Gamma \to \delta, \Sigma}\ (\mathrm{cut})}{\Gamma \to \Delta}\ (\to e)$$

1 ⇒ 2：　$\Gamma \to \Delta$ に至る LK の証明図の長さについての帰納法で証明します．

長さが1のときは公理のときです．LKのどちらの公理の場合も $\neg\alpha,\ \alpha \to \bot$ と $\neg\Delta,\ \bot \to \bot$ が LJ で証明できるので成り立っています．

長さが2以上のときは最後に使われた推論規則によって場合分けします．最後に使われた推論規則が構造に関する推論規則のときは簡単に証明できますので，ここでは最後に使われた推論規則が論理記号に関する推論規則のときだけ証明を与えます．

最後に使われた推論規則が $(\supset\to)$ のときは，証明図の最後の部分は次の形です：

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \alpha \qquad \beta, \Delta \to \Lambda}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\ (\supset\to).$$

帰納法の仮定により，$\neg\Theta,\ \neg\alpha,\ \Gamma \to \bot$ と $\neg\Lambda,\ \beta,\ \Delta \to \bot$ が LJ で証明可能です．それぞれの証明図を $\Pi_1$ と $\Pi_2$ とします．そして，次の証明図を $\Pi_3$ とします：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_2 \\ \neg\Lambda, \beta, \Delta \to \bot\end{array}}{\beta, \neg\Lambda, \Delta \to \bot}\ (e\to)}{\neg\Lambda, \Delta \to \neg\beta}\ (\to\supset) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \neg\Theta, \neg\alpha, \Gamma \to \bot\end{array}}{\neg\alpha, \neg\Theta, \Gamma \to \bot}\ (e\to)}{\neg\beta \supset \neg\alpha, \neg\Lambda, \Delta, \neg\Theta, \Gamma \to \bot}\ (\supset\to)$$

そのとき，次の証明図が $\neg\Theta,\ \neg\Lambda,\ \alpha \supset \beta,\ \Gamma,\ \Delta \to \bot$ が LJ で証明可能であることを示しています．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \alpha \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \to \beta \quad \bot \to \bot}{\neg\beta, \beta \to \bot}\ (\supset\to)}{\beta, \neg\beta \to \bot}\ (e\to)}{}}{\alpha \supset \beta, \alpha, \neg\beta \to \bot}\ (\supset\to)}{\alpha \supset \beta, \neg\beta \to \neg\alpha}\ (e\to)(\to\supset)}{\alpha \supset \beta \to \neg\beta \supset \neg\alpha}\ (e\to)(\to\supset) \qquad \begin{array}{c}\Pi_3 \\ \neg\beta \supset \neg\alpha, \neg\Lambda, \Delta, \neg\Theta, \Gamma \to \bot\end{array}}{\alpha \supset \beta, \neg\Lambda, \Delta, \neg\Theta, \Gamma \to \bot}\ (\mathrm{cut})}{\neg\Theta, \neg\Lambda, \alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \bot}\ (e\to)$$

最後に使われた推論規則が $(\to\supset)$ のときは，証明図の最後の部分は次の形です：

$$\dfrac{\alpha, \Gamma \to \Theta, \beta}{\Gamma \to \Theta, \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)$$

帰納法の仮定により，$\neg\Theta$, $\neg\beta$, $\alpha$, $\Gamma \to \bot$ が LJ で証明可能です．その証明図を $\Pi_1$ とします．また，次の証明図を $\Pi_2$ とおきます．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{\neg\Theta, \neg\beta, \alpha, \Gamma \to \bot}}{\neg\Theta, \neg\beta, \Gamma \to \neg\alpha}\ (e\to)(\to\supset) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \alpha \quad \bot \to \beta}{\neg\alpha, \alpha \to \beta}\ (\supset\to)}{\alpha, \neg\alpha \to \beta}\ (e\to)}{\neg\alpha \to \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)}{\dfrac{\neg\Theta, \neg\beta, \Gamma \to \alpha \supset \beta}{\neg\beta, \neg\Theta, \Gamma \to \alpha \supset \beta}\ (e\to)}\ (\text{cut})$$

そのとき，次の証明図が $\neg\Theta, \neg(\alpha \supset \beta), \Gamma \to \bot$ が LJ で証明可能であることを示しています．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \to \beta}{\alpha, \beta \to \beta}\ (w\to)}{\beta \to \alpha \supset \beta}\ (\to\supset) \quad \bot \to \bot}{\neg(\alpha \supset \beta), \beta \to \bot}\ (\supset\to)}{\beta, \neg(\alpha \supset \beta) \to \bot}\ (e\to)}{\neg(\alpha \supset \beta) \to \neg\beta}\ (\to\supset) \qquad \dfrac{\Pi_2}{\neg\beta, \neg\Theta, \Gamma \to \alpha \supset \beta}}{\neg(\alpha \supset \beta), \neg\Theta, \Gamma \to \alpha \supset \beta}\ (\text{cut}) \quad \bot \to \bot}{\dfrac{\neg(\alpha \supset \beta), \neg(\alpha \supset \beta), \neg\Theta, \Gamma \to}{\neg\Theta, \neg(\alpha \supset \beta), \Gamma \to \bot}\ (c\to)(e\to)}\ (\supset\to)$$

□

グリベンコの定理を使えば簡単に定理 1.2.57 を証明することができますので，演習問題としておきます．

▶ **問題 1. 2. 59** *　定理 1.2.57 を証明せよ．

▶ **問題 1. 2. 60（グリベンコの定理の別証明）***

1. 次の論理式について，「$M$ : 論理式」が体系 NJ で証明できるようなラムダ項 $M$ を見つけ，「$M$ : 論理式」の NJ の証明図を描け．
   (a)　$(\alpha \supset \neg\neg\beta) \supset \neg\neg(\alpha \supset \beta)$
   (b)　$\neg\neg\neg\alpha \supset \neg\alpha$
   (c)　$\neg\neg(\alpha \supset \gamma) \supset \neg\neg\alpha \supset \neg\neg\gamma$
2. 古典命題論理の体系 NK は直観主義命題論理の体系 NJ に次の二重否定の除去規則を付け加えたものとする．

$$\dfrac{M : \neg\neg\alpha}{\mathrm{D}M : \alpha}$$

上の 1(a), 1(b), 1(c) で求めた閉ラムダ項をそれぞれ $T$, $U$, $V$ とする．
また，$\Gamma \vdash_{NK} M : \gamma$ とする．定数 D を含むかも知れないラムダ項 $M$ に対して，

D を含まないラムダ項 $M^j$ を以下のように帰納的に定義する.

(a)　$x^j \equiv \lambda y.yx$,

(b)　$(\mathsf{D}N)^j \equiv UN^j$,

(c)　$(\mathsf{A}N)^j \equiv (\lambda x.\mathsf{A}(x(\lambda x.x)))N^j$,

(d)　$(NR)^j \equiv VN^jR^j$,

(e)　$(\lambda x.N)^j \equiv T(\lambda x.N^j)$.

このとき，$\Gamma \vdash_{NJ} M^j : \neg\neg\gamma$ であることを，ラムダ項 $M^j$ の定義についての帰納法で証明せよ.

## 1.3. ゲンツェンの基本定理

### 1.3.1　基本定理とその応用

ゲンツェンの体系 LJ と LK の推論規則の中で，cut だけが他の推論規則とは際立った違いがあります．cut 以外の規則では，上式に現れる論理式は下式にそのまま現れているか，下式に現れている論理式の部分となっています．それに対して，次の LJ の cut 規則を考えてみれば分かるように，上式に現れている論理式 $\alpha$ が下式に現れないだけでなく，下式に現れるどの論理式の部分としても現れていない可能性があります.

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \Delta \to \gamma}\ (\mathrm{cut})$$

その結果，cut が使われている推件式 $\to \alpha$ の証明図には，$\alpha$ からは予想もつかない論理式が途中に現れる可能性があります．一方，cut が全く使われていない推件式 $\to \alpha$ の証明図については，次のことがいえます：

**ゲンツェン流の体系では，論理式 $\alpha$ に至る cut が使われていない証明図に現れる論理式は $\alpha$ の部分論理式だけである.**

実は同じようなことが自然推論 NJ の正規な証明図についても成り立っています：

**自然推論 NJ では，論理記号 '⊥' を含まない論理式[5] $\alpha$ に至る正規な証明図に現れる論理式は $\alpha$ の部分論理式だけである.**

このことは自然推論 NJ の正規化定理と LJ の基本定理 (cut 除去定理) とが密接な関係にあることを示唆しています．ここでは NJ の正規化定理を使って LJ の基本定理を証明し，LJ の基本定理とグリベンコの定理を使って LK の基本定理を証明します.

> **定理 1.3.1（ゲンツェンの基本定理）**　推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LJ で証明できるならば，$\Gamma \to \Theta$ に至る cut の全く使われていない LJ の証明図がある．このことは LJ を LK に変えても成り立っている.

5)　論理記号 '⊥' についての変形を付け加えれば，「論理記号 '⊥' を含まない」という条件を取り除くことができます．しかし，基本定理の証明には '⊥' についての変形は必要ありません.

ゲンツェンの基本定理は論理学の最も美しい定理といわれています．基本定理の証明をする前に，その応用として古典命題論理が決定可能であることと体系 LJ が体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ の保存拡大であることを示します．古典命題論理が決定可能であることを示す際には，基本定理は次の補助定理を示すためだけに使われます．以下，系 1.3.8 までは体系 LK で基本定理が成り立つことを仮定しています．

**補助定理 1.3.2** 推件式 $\Gamma \to \Theta$ に論理記号 '$\supset$' が全く現れないとき，次の 2 つの条件は同値である：

1. $\Gamma \to \Theta$ は LK で証明できる，
2. $\Gamma$ が $\bot$ を含むか，$\Gamma$ と $\Theta$ の両方に含まれる命題変数が存在する．

**証明** $2 \Rightarrow 1$： 次のどちらかが $\Gamma \to \Theta$ の証明図になっている (両方に含まれる命題変数を $p$ とする)：

$$\dfrac{\bot \to}{\Gamma \to \Theta}\,(w \to)(e \to)(\to w)(\to e), \qquad \dfrac{p \to p}{\Gamma \to \Theta}\,(w \to)(e \to)(\to w)(\to e).$$

$1 \Rightarrow 2$： 基本定理により，推件式 $\Gamma \to \Theta$ の cut なしの証明図を考えます．$\Gamma \to \Theta$ に論理記号 '$\supset$' が全く現れないのですから，その証明図にも論理記号 '$\supset$' は全く現れません．その結果，使われている推論規則は cut 以外の構造に関する規則だけであることが分かり，証明図に枝分かれがないことも分かります．その一番上にある推件式は $\bot \to$ か $p \to p$ の形かです．$\bot \to$ のときは $\Gamma$ が $\bot$ を含み，$p \to p$ のときは命題変数 $p$ が $\Gamma$ と $\Theta$ の両方に含まれます． □

**補助定理 1.3.3** 列 $\Theta$ は論理式 $\alpha \supset \beta$ を含み，列 $\Lambda$ は $\Theta$ から 1 つの $\alpha \supset \beta$ を取り除いて得られる列とする．推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明可能であることと，推件式 $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ が LK で証明可能であることは，同値である．

**証明** 次の 2 つの推論図が，定理が成り立つことを示しています．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Lambda, \alpha \supset \beta}\,(\to e) \qquad \dfrac{\alpha \to \alpha \quad \beta \to \beta}{\alpha \supset \beta, \alpha \to \beta}\,(\supset\to)}{\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta}\,(\mathrm{cut})(e \to)$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta}{\Gamma \to \Lambda, \alpha \supset \beta}\,(\to\supset)}{\Gamma \to \Theta}\,(\to e)$$

□

> **補助定理 1.3.4**　列 $\Gamma$ は論理式 $\alpha \supset \beta$ を含み，列 $\Delta$ は $\Gamma$ から 1 つの $\alpha \supset \beta$ を取り除いて得られる列とする．推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明可能であることと，推件式 $\Delta \to \Theta, \alpha$ と $\beta, \Delta \to \Theta$ が両方とも LK で証明可能であることが，同値である．

**証明**　次の 3 つの推論図が，定理が成り立つことを示しています．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha \to \alpha}{\alpha \to \alpha, \beta}\,(\to w)}{\to \alpha, \alpha \supset \beta}\,(\to\supset) \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Delta \to \Theta}\,(e \to)}{\Delta \to \Theta, \alpha}\,(\mathrm{cut})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta \to \beta}{\alpha, \beta \to \beta}\,(w \to)}{\beta \to \alpha \supset \beta}\,(\to\supset) \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Delta \to \Theta}\,(e \to)}{\beta, \Delta \to \Theta}\,(\mathrm{cut})
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\Delta \to \Theta, \alpha \quad \beta, \Delta \to \Theta}{\alpha \supset \beta, \Delta, \Delta \to \Theta, \Theta}\,(\supset\to)}{\Gamma \to \Theta}\,(e \to)(c \to)(\to e)(\to c)
$$

□

> **定理 1.3.5**　ゲンツェン流の体系 LK は決定可能である，すなわち推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明可能であるかどうか判定する方法がある．

**証明**　$\Gamma \to \Theta$ に現れる論理記号 '$\supset$' の数に関する帰納法で証明します．

**1.**　'$\supset$' が全く現れないとき．

補助定理 1.3.2 により，$\Gamma$ が $\perp$ を含むか，$\Gamma$ と $\Theta$ の両方に含まれる命題変数があるかどうかを調べればよい．

**2.**　$\Theta$ に '$\supset$' が現れるとき．

$\Theta$ に現れる '$\supset$' を含む論理式を $\alpha \supset \beta$ とします．$\Theta$ から論理式 $\alpha \supset \beta$ を (2 つ以上あるときはそのうちの 1 つを) 取り除いて得られる列を $\Lambda$ とします．補助定理 1.3.3 により，推件式 $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ が LK で証明可能であるかどうかを調べればよいことが分かります．推件式 $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ に現れる論理記号 '$\supset$' の数は $\Gamma \to \Theta$ に現れるその数より 1 つ少ないので，帰納法の仮定により $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ が LK で証明可能であるかどうか判定できます．

**3.**　$\Gamma$ に '$\supset$' が現れるとき．

$\Gamma$ に現れる '$\supset$' を含む論理式を $\alpha \supset \beta$ とします．$\Gamma$ から論理式 $\alpha \supset \beta$ を (2 つ以上あるときはそのうちの 1 つを) 取り除いて得られる列を $\Delta$ とします．補助定理 1.3.4 により，推件式 $\Delta \to \Theta, \alpha$ と $\beta, \Delta \to \Theta$ が LK で証明できるかどうかを調べればよいことが分かります．両方とも証明できれば $\Gamma \to \Theta$ は証明でき，片方でも証明できなければ $\Gamma \to \Theta$ は証明でき

ません．推件式 $\Delta \to \Theta, \alpha$ と $\beta, \Delta \to \Theta$ は，ともに現れる論理記号 '$\supset$' の数は $\Gamma \to \Theta$ に現れるその数より 1 つ少ないので，帰納法の仮定により両方とも LK で証明可能であるかどうか判定できます． □

上の証明から自然に，与えられた推件式が LK で証明できるかどうか判定する計算機プログラムが得られます．それは演習問題としておきます．

▶ **問題 1.3.6** どんな言語でもよいから，与えられた推件式が LK で証明できるかどうか判定する計算機プログラムをつくれ．

プログラム言語の C 言語などでは，関数を定義するときに自分自身を呼び出すことができます．そのような呼び出しのことを**再帰呼び出し (recursive call)** といいます．この問題の解を見ると，帰納法による証明と再帰呼び出しを使ったプログラムとが密接な関係にあることが分かります．

ここで述べた方法では，直観主義論理の体系 LJ が決定可能であることは示せません．ゲンツェンは基本定理を使って LJ にも LK にも適用できるより一般的な方法で，LJ と LK が決定可能であることを示しています．しかし，その証明から得られる決定手続きは，ここで得たものより複雑です．ゲンツェンが使用した一般的な方法により，いろいろな命題論理が決定可能であることが示されています．しかし，発展のところで述べた含意断片論理 BB′IW については決定可能であるかどうか，いまだに分かっていません．

論理式としては '$\perp$' を含まないものだけを考え，体系 LJ から公理型 $(N)\perp \to \alpha$ を取り除いた体系を $\mathrm{LJ}_{\supset}$ とします．体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ の証明図は体系 LJ の証明図ですので，推件式 $\Gamma \to \gamma$ が $\mathrm{LJ}_{\supset}$ で証明可能ならば LJ でも証明可能です．つまり体系 LJ は体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ より論理式の概念も拡大しており，証明できる推件式も減っていません．このような状況を，体系 LJ は体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ の**拡大 (extension)** である，といいます．この逆，体系 LJ で証明できる '$\perp$' を含まない推件式は体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ で証明できる，は成り立つでしょうか？ これが成り立っているとき，体系 LJ は体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ の**保存拡大 (conservative extension)** であるといいます．

体系 LJ が体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ の保存拡大であることが，LJ の基本定理を使って次のように証明できます．

推件式 $\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明できるとします．LJ の基本定理により $\Gamma \to \gamma$ の cut が使われていない証明図が存在します．その証明図には $\perp$ は現れないので，公理型 $(N)\perp \to \alpha$ は使われていません．よってその証明図は $\mathrm{LJ}_{\supset}$ の証明図になっています．

**定理 1.3.7** 体系 LJ が体系 $\mathrm{LJ}_{\supset}$ の保存拡大である．

論理式としては '$\perp$' を含まないものだけを考え，自然演繹体系 NJ から推論規則 $\perp$-E を取り除いた体系を $\mathrm{NJ}_{\supset}$ とします．この定理を使うと，自然演繹体系 NJ と $\mathrm{NJ}_{\supset}$ との間の次の系を証明することができます．

**系 1.3.8**　$\Gamma$ を '$\perp$' を含まない論理式の列とし，$\gamma$ を '$\perp$' を含まない論理式とするとき，次の 2 つの条件は同値である：

1. $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$，
2. $\Gamma \vdash_{NJ_\supset} \gamma$．

**証明**　2 から 1 は明らかである．1 から 2 を示す．$\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ と定理 1.2.53 から，$\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明可能である．定理 1.3.7 により $\Gamma \to \gamma$ が $\mathrm{LJ}_\supset$ で証明可能である．定理 1.2.53 の 1 から 3 を導いたのと同様に，これから $\Gamma \vdash_{NJ_\supset} \gamma$ が導ける．□

### 1.3.2　体系 LJ の基本定理の証明

$\Gamma (\equiv \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を論理式の列とします．推件式 $\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明可能であるとします．このとき，定理 1.2.53 により $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ です．よって，変数 $z_1, \cdots, z_n$ と項 $M$ が存在して

$$z_1 : \alpha_1, \cdots, z_n : \alpha_n \vdash_{NJ} M : \gamma$$

となります．NJ の正規化定理から，それを示す NJ の正規な推論図が存在します．その推論図の長さに関する帰納法で体系 LJ の基本定理を証明します．

**1.** 推論図の長さが 1 のとき．

推論図は次の形をしています．

$$x : \gamma$$

これが $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ を示していることより，$\gamma$ は $\Gamma$ に含まれています．よって，公理 $\gamma \to \gamma$ から出発して，推論規則 $(w \to)$ と $(e \to)$ を使って，$\Gamma \to \gamma$ は LJ で cut なしで証明できます．

**2.** 推論図の長さが 1 より大のときは，2 つの場合に分かれます．

**2.1.** 最後に使われた推論規則が $\supset$-I のとき．

推論図は次の形をしています ($\gamma \equiv \alpha \supset \beta$ です)．

$$\dfrac{\begin{array}{c} x : \alpha \\ \Pi \\ N : \beta \end{array}}{\lambda x.N : \alpha \supset \beta}$$

推論図

$$\begin{array}{c} x : \alpha \\ \Pi \\ N : \beta \end{array}$$

について帰納法の仮定が使えて，$\alpha, \Gamma \to \beta$ が cut なしで LJ で証明できます．よって，LJ の推論規則 $(\to\supset)$ により，$\Gamma \to \alpha \supset \beta$ が LJ で cut なしで証明できます．

**2.2.** 最後に使われた推論規則が消去規則のとき．

推論図の結論 $M : \gamma$ から左に左に辿って行って，一番左にある上端の式にまで達する経路を**主経路 (main branch)** といいます．推論図が正規であることと最後に使われた推論規則が消去規則であることから，主経路に現れる式 (の出現) は $\supset$-I の結論にはなっていません．

なぜならば，もしそのような式 (の出現) があったならば，その中で最も下にあるものの述部が極大論理式になってしまうからです．そこで推論図の最も左側の上端部に注目すると，推論図は次の 2 つのどちらかの形をしています．

$$\dfrac{x:\alpha\supset\beta \quad \begin{array}{c}\Pi_1\\ N:\alpha\end{array}}{\begin{array}{c}xN:\beta\\ {}[xN/y]\Pi\end{array}} \qquad\qquad \dfrac{x:\bot}{\begin{array}{c}\mathsf{A}x:\beta\\ {}[\mathsf{A}x/y]\Pi\end{array}}$$

ここで，変数 $x$ は自由な出現であることに注意してください．上図左側の推論図の中の $\Pi$ は次のようにして得られるものです．もとの推論図の主経路の上端のすぐ下の式 (それを $xN:\beta$ とした) より上の部分を取り除いたものを $\Pi'$ とします．$\Pi'$ は一番左側の上端の $xN:\beta$ の主部が変数ではないので，推論図になっていません．そこで，もとの推論図には現れない変数を $y$ とし，$\Pi'$ の $xN:\beta$ の部分とその下の部分に現れる $xN$ を $y$ で置き換えます．そのようにして得られた推論図が $\Pi$ です．上図右側の推論図の中の $\Pi$ もほぼ同様にして得られたものです．また，上で使われている推論図の表記法は 32 ページの**推論図の合成**のところで説明されているものです．

左側の場合は，推論図 $\Pi_1$ の落ちていない仮定の述部を並べたものを $\Delta$ とし帰納法の仮定を適用すると，推件式 $\Delta\to\alpha$ が LJ で cut なしで証明できます．推論図 $\Pi$ の $\beta$ 以外の落ちていない仮定の述部を並べたものを $\Sigma$ とし帰納法の仮定を適用すると，推件式 $\beta,\Sigma\to\gamma$ が LJ で cut なしで証明できます．ここで，列 $\Delta$ と $\Sigma$ に現れる論理式はすべて列 $\Gamma$ に現れています．よって，LJ の推論規則 $(\supset\to)$ により $\alpha\supset\beta,\Delta,\Sigma\to\gamma$ が LJ で cut なしで証明できます．論理式 $\alpha\supset\beta$ は列 $\Gamma$ に含まれますから，LJ の推論規則 $(e\to)$, $(c\to)$, $(w\to)$ を何回か使えば，推件式 $\Gamma\to\gamma$ が LJ で cut なしで証明できることが分かります．

右側の場合は，列 $\Gamma$ が論理式 $\bot$ を含みますので，公理 $\bot\to\gamma$ から出発して推論規則 $(w\to)$ と $(e\to)$ を使って，$\Gamma\to\gamma$ が LJ で cut なしで証明できることが分かります． □

### 1.3.3 体系 LK の基本定理の証明

まず 1 つの補助定理が成り立つことを説明します．その補助定理のきちんとした証明は演習問題として残しておきます．

推件式 $\neg\delta,\Gamma\to\Delta$ の LK の cut の使われていない証明図が与えられたとします．その証明図に現れるすべての推件式の前件に現れる $\neg\delta$ を消して後件に $\delta$ を付け加えます．そのようにして得られた図形は推件式 $\Gamma\to\Delta,\delta$ の証明図にほぼなっています．ほぼというのは，たとえば始式 $\neg\delta\to\neg\delta$ は $\to\neg\delta,\delta$ に変わってしまい，始式ではなくなっています．しかし，その部分を

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta\to\delta}{\delta\to\delta,\bot}\,(\to w)}{\to\delta,\neg\delta}\,(\to\supset)}{\to\neg\delta,\delta}\,(\to e)$$

と修正すれば証明図の一部とすることができます．そのような修正を必要なところすべてで

行えば推件式 $\Gamma \to \Delta, \delta$ の証明図を得ることができます．同様に，$\Gamma \to \Delta, \bot$ の cut なしの証明図から右辺の '$\bot$' を取り除いて適当な修正を施すと，$\Gamma \to \Delta$ の cut なしの証明図を得ることができます．このことから，次の補助定理が得られます．

**補助定理 1.3.9**

1. 列 $\Gamma^-$ を列 $\Gamma$ から論理式 $\neg\delta$ をすべて取り除いて得られる列とする ($\Gamma$ に $\neg\delta$ が現れないときは $\Gamma^- \equiv \Gamma$ である)．そのとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明できるならば，推件式 $\Gamma^- \to \Theta, \delta$ も LK で cut なしで証明できる．
2. 列 $\Theta^-$ を列 $\Theta$ から論理式 $\bot$ をすべて取り除いて得られる列とする ($\Theta$ に $\bot$ が現れないときは $\Theta^- \equiv \Theta$ である)．そのとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明できるならば，推件式 $\Gamma \to \Theta^-$ も LK で cut なしで証明できる．

▶ **問題 1.3.10**

1. 補助定理 1.3.9 の 1 を推件式 $\Gamma \to \Theta$ の cut なしの証明図の長さに関する帰納法で証明せよ．
2. 補助定理 1.3.9 の 2 を推件式 $\Gamma \to \Theta$ の cut なしの証明図の長さに関する帰納法で証明せよ．

推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明可能とします．そのとき LK の基本定理はその推件式が cut なしで LK で証明できることを主張しています．LK の基本定理の証明は列 $\Theta$ の長さに関する帰納法で証明します．

**1.** 列 $\Theta$ の長さが 0 のとき．

グリベンコの定理より，$\Gamma \to \bot$ が LJ で証明可能です．LJ の基本定理により $\Gamma \to \bot$ が LJ で cut なしで証明可能です．LJ の証明図は LK の証明図でもあるので，$\Gamma \to \bot$ が LK で cut なしで証明可能です．よって，補助定理 1.3.9 の 2 により $\Gamma \to$ が LK で cut なしで証明可能となります．

**2.** 列 $\Theta$ の長さが 1 以上のとき．

$\Theta \equiv \Delta, \delta$ とします．LK の派生規則 ($\neg \to$) を使うと推件式 $\neg\delta, \Gamma \to \Delta$ が LK で証明できます．列 $\Delta$ の長さは列 $\Theta$ の長さより小さいので，帰納法の仮定により推件式 $\neg\delta, \Gamma \to \Delta$ が LK で cut なしで証明できます．よって，補助定理 1.3.9 の 1 により推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明できることが分かります．

## 1.4. 古典命題論理の意味論

### 1.4.1　真理表

「1994 年 8 月 4 日に静岡県天竜市では最高気温が 40.6 度を記録した」は正しい命題であるらしい．「1998 年にフランスで開かれたワールドカップ・サッカーではフランスは優勝しなかった」は間違った命題です．前者には「らしい」をつけて断定を避けているのに後者では

断定しているのは，著者がこれらの命題の真偽を信じている程度の違いを表しています．いずれにしても，これらの命題の真偽を決めるには，その意味内容を確定し，それを事実と照合するしかありません．どのようにして命題の意味内容を確定するのかという問題は広い意味では論理学の問題ですが，本書で扱っている数理論理学の範囲外にあります．また，いかにして事実と照合するのかというのも数理論理学の範囲外の問題です．8 ページで述べたように，命題論理は接続詞「ならば」,「かつ」,「または」や助動詞である「でない」などの意味や性質について研究する学問でした．そこで，ワールドカップについての命題は助動詞「でない」を含んでいるので，命題論理の範囲である程度分析することができます．「1998 年にフランスで開かれたワールドカップ・サッカーではフランスは優勝した」という命題を $p$ とすると，元の命題は $\neg p$ と表すことができます．そして命題 $p$ が真のとき命題 $\neg p$ は偽で，命題 $p$ が偽のとき命題 $\neg p$ は真となるのです．著者は命題 $p$ が真であると信じているので，命題 $\neg p$ は間違っていると断言したのでした．

このように，基本的な命題の真偽を決めたときに，基本的な命題から接続詞「ならば」,「かつ」,「または」や助動詞「でない」などを使ってつくられた複雑な命題の真偽を決めることが命題論理の意味論の仕事です．とくに，基本的な命題の真偽をどのように決めても常に真になる複雑な命題に興味があるのです．なぜならば，このような命題の場合には，基本的な命題の真偽を決めるための事実との照合などの作業をしなくても，その複雑な命題が真であると断言できるからです．

複雑な命題の真偽を決めるためには，基本的な命題から複雑な命題をつくるときに使う接続詞の意味を決めてやる必要があります．私たちの体系では基本的な論理記号は ‘$\supset$’ と ‘$\perp$’ だけでしたので，それらの意味を決めてやれば十分です．真を表すために ‘$\top$’ を使うことにします．また，‘$\perp$’ の意味は偽な命題でしたので，‘$\perp$’ をそのまま偽を表すために使います[6]．そのとき ‘$\supset$’ の意味を次の表のように決めます．

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \supset \beta$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\perp$ | $\perp$ |
| $\perp$ | $\top$ | $\top$ |
| $\perp$ | $\perp$ | $\top$ |

この表の見方ですが，たとえば下から 2 行目は，$\alpha$ が偽で $\beta$ が真のときは，$\alpha \supset \beta$ は真であることを表しています．このような表のことを**真理表 (truth table)** といいます．

‘$\supset$’ についての真理表をこのように定めることの妥当性を簡単に説明します．命題「1994 年に日本社会党の委員長の村山氏が総理大臣になる」を $\alpha$ とします．命題「1994 年中に為替相場は 1 ドル 90 円を割る」を $\beta$ とします．政治評論家の A 氏が 1994 年 4 月 14 日に「1994 年に日本社会党の委員長の村山氏が総理大臣になったら，今年中に為替相場は 1 ドル 90 円を割るだろう」と発言したとします．A 氏は $\alpha \supset \beta$ を予測したことになります．A 氏の予測

6) 本当は別の記号を使う方が望ましいのですが，記号の数を増やしたくないのでこのようにしました．

がはずれた (偽になった) と誰もが考えるのは，$\alpha$ が真になり $\beta$ が偽になったときです．また，A 氏の予測が当たった (真になった) と誰もが考えるのは，$\alpha$ が真になり $\beta$ が真になったときです．ここまでの説明で真理表の上半分の部分が妥当であることが分かります．$\alpha$ が偽のときはどうでしょうか．村山氏が総理大臣にならなかったときについて A 氏は何も語っていないので，A 氏の予測がはずれたと考えるのは無理があります．当たったと考えるのも不自然な気もするかも知れませんが，どちらかに決めろといわれれば当たったと考えるしかないでしょう．8 ページで述べたように，古典論理においては，命題とは真偽の定まった文のことでしたので，真か偽かのどちらかに決めなければならないのです．そのような立場に立ったときには，'⊃' の真理表のような決め方が最も自然言語「ならば」の意味に近いものでしょう．

'⊃' の真理表のような「ならば」の意味づけでは不自然な例は沢山あります．自然言語での命題「$\alpha$ ならば $\beta$」の真偽は $\alpha$ と $\beta$ の真偽だけでは決めることができないニュアンスがあるからです．たとえば，$\alpha$ は $\beta$ の原因であるという意味が込められていることがありますが，'⊃' の真理表はそのニュアンスを捕らえていません．そのようなニュアンスを形式化すると古典論理とは違った論理になります．このことが直観主義論理や 13 ページに述べたようなさまざまな論理が研究される理由の 1 つです．古典論理はそのような微妙なニュアンスを切り捨てた論理ということができます．しかしその結果，意味論的には非常に簡単な論理である古典論理をつくることができたわけです．しかも古典論理によって数学全体を形式化することができたことが重要なことです．

'⊃' の真理表によると，次の 3 つの等式が成り立ちます：

$$\top \supset \alpha = \alpha, \qquad \bot \supset \alpha = \top, \qquad \alpha \supset \top = \top.$$

ここで等号 '=' の意味は，$\alpha$ に $\top$ を代入しても $\bot$ を代入しても両辺が等しくなることを表しています．また，等式 $\alpha \supset \alpha = \top$ も容易に確かめられます．これらの等式を使うと次のような計算ができます．

$$\alpha = \top \quad \text{のとき} \quad \alpha \vee \beta = (\top \supset \beta) \supset \beta = \beta \supset \beta = \top.$$

$$\alpha = \bot \quad \text{のとき} \quad \alpha \vee \beta = (\bot \supset \beta) \supset \beta = \top \supset \beta = \beta.$$

この計算から次の $\vee$ の真理表が得られます．

| $\alpha$ | $\beta$ | $\alpha \vee \beta$ |
|---|---|---|
| $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |

▶ **問題 1.4.1 ***　$\neg$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ の真理表をつくれ．

### 1.4.2 トートロジー・健全性定理・完全性定理

論理式 $\alpha$ に含まれる命題変数にどのように真偽値を代入しても，$\alpha$ の値が $\top$ となるような論理式 $\alpha$ をトートロジー (**tautology**) といいます．命題変数への真偽値の与え方を**付値** (**assignment**) といいます．すなわち，付値とは命題変数全体の集合から $\{\top, \bot\}$ への写像です．付値 $f$ が与えられたとき，$f$ を次の 1, 2 にしたがって論理式全体の集合から $\{\top, \bot\}$ への写像に拡張します (拡張された写像も $f$ と書いています)：

1. $f(\bot) = \bot$,
2. $f(\alpha \supset \beta) = f(\alpha) \supset f(\beta)$.

この拡張された写像のことも付値といいます．付値を使えば次のようにトートロジーを定義することができます．

ついでに，推件式に対するトートロジーの概念も定義しておきます．

**定義 1.4.2** (トートロジー)

1. 任意の付値 $f$ に対して $f(\alpha) = \top$ のとき，論理式 $\alpha$ をトートロジーという．
2. 任意の付値 $f$ に対して, すべての $\alpha \in \Gamma$ について $f(\alpha) = \top$ のときには，ある $\beta \in \Theta$ が存在して $f(\beta) = \top$ となるとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ をトートロジーという．

この定義から，論理式 $\alpha$ がトートロジーであることと推件式 $\to \alpha$ がトートロジーであることは同値です．推件式 $\Gamma \to \Theta$ がトートロジーでないのは，すべての $\alpha \in \Gamma$ について $f(\alpha) = \top$ で，すべての $\beta \in \Theta$ について $f(\beta) = \bot$ となる付値 $f$ が存在するときです．このような付値 $f$ のことを推件式 $\Gamma \to \Theta$ の**反駁** (**refutation**) といいます．

▶ **問題 1.4.3**　体系 HK の公理はすべてトートロジーであることを示せ．

論理式 $\alpha \supset \beta$ と $\alpha$ が両方ともトートロジーのとき，等式 $\top \supset \beta = \beta$ から分かるように，論理式 $\beta$ もトートロジーとなります．よって，推論規則 MP はトートロジーからはトートロジーしか導きません．また，上の問題から体系 HK の公理はトートロジーなので，HK で証明できる論理式はトートロジーであることが分かります．この事実を HK の**健全性** (**soundness**) といいます．

**定理 1.4.4** (HK の健全性定理)　論理式 $\alpha$ が体系 HK で証明できるならば，$\alpha$ はトートロジーである．

▶ **問題 1.4.5** *　論理式 $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset r) \supset r$ が体系 HK で証明できないことを示せ．

**寄り道 (日常言語で書かれた命題の分析)**

いままでは形式化された命題である論理式のみを扱ってきましたが，これまで述べてきた方法は日常言語で書かれた命題の分析にも使うことができます．次の 2 つの命題 $\alpha, \beta$ を考えてみましょう．

$\alpha$ : 山田さんが犬か猫を飼っているならば，この名簿に登録されている．

$\beta$ : 山田さんが猫を飼っているならば，この名簿に登録されている．

これらの命題は次の命題 $p, q, r$ を用いてさらに分析できます．

$p$ : 山田さんが犬を飼っている．

$q$ : 山田さんが猫を飼っている．

$r$ : 山田さんがこの名簿に登録されている．

とすると，

$$\alpha = (p \vee q) \supset r, \qquad \beta = q \supset r$$

となります．ここで $\alpha \supset \beta$ という命題を考えると，それは直観主義論理で (もちろん古典論理でも) 証明できる命題となっています．

▶ **問題 1.4.6** *　次の 2 つの命題を $\alpha, \beta$ とする．

$\alpha$ : 大学を卒業していて大学院の試験に合格していれば，またそのときにかぎり，大学院に入学する資格がある．

$\beta$ : 大学を卒業していないならば，大学院の試験に合格していなかったのであり，大学院に入学する資格がない．

このとき，命題 $\alpha \supset \beta$ が古典論理で証明できないことを示せ．

健全性定理の逆を完全性定理といいます．完全性定理の証明は体系 LK に対して行います．証明は定理 1.3.5 (LK の決定可能性) とほぼ同様にできます (ただし，基本定理は使っていません)．

**定理 1.4.7 (LK の完全性定理)**　推件式 $\Gamma \to \Theta$ がトートロジーならば，$\Gamma \to \Theta$ は体系 LK で証明できる．

**証明**　$\Gamma \to \Theta$ が証明可能でなければ，$\Gamma \to \Theta$ の反駁があることを示します．$\Gamma \to \Theta$ に現れる論理記号 '$\supset$' の数に関する帰納法で証明します．

**1.** '$\supset$' がまったく現れないとき．

$\Gamma \to \Theta$ が証明できないので，$\Gamma$ が $\perp$ を含みません．また，$\Gamma$ と $\Theta$ の両方に含まれる命題変数はありません．そこで，$\Gamma$ に含まれるすべての命題変数 $p$ について $f(p) = \top$ とし，$\Theta$ に含まれるすべての命題変数 $q$ について $f(q) = \perp$ と付値 $f$ を定義してやると，$f$ が $\Gamma \to \Theta$ の反駁になっています．

**2.** $\Theta$ に '$\supset$' が現れるとき．

$\Theta$ に現れる '$\supset$' を含む論理式を $\alpha \supset \beta$ とします．$\Theta$ から論理式 $\alpha \supset \beta$ を (2 つ以上あるときはそのうちの 1 つを) 取り除いて得られる列を $\Lambda$ とします．補助定理 1.3.3 により，推件式 $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ は LK で証明できません．推件式 $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ に現れる論理記号 '$\supset$' の数は $\Gamma \to \Theta$ に現れるその数より 1 つ少ないので，帰納法の仮定により $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ の反駁 $f$ が存在します．

$$f(\alpha \supset \beta) = f(\alpha) \supset f(\beta) = \top \supset \bot = \bot$$

なので，付値 $f$ は $\Gamma \to \Theta$ の反駁でもあります．

**3.** $\Gamma$ に '$\supset$' が現れるとき．

$\Gamma$ に現れる '$\supset$' を含む論理式を $\alpha \supset \beta$ とします．$\Gamma$ から論理式 $\alpha \supset \beta$ を (2 つ以上あるときはそのうちの 1 つを) 取り除いて得られる列を $\Delta$ とします．補助定理 1.3.4 により，推件式 $\Delta \to \Theta, \alpha$ か $\beta, \Delta \to \Theta$ のどちらかが LK で証明できません．推件式 $\Delta \to \Theta, \alpha$ が証明できないときは，帰納法の仮定によりその反駁 $f$ が存在します．

$$f(\alpha \supset \beta) = f(\alpha) \supset f(\beta) = \bot \supset f(\beta) = \top$$

なので，$f$ は $\Gamma \to \Theta$ の反駁になっています．推件式 $\beta, \Delta \to \Theta$ が証明できないときは，帰納法の仮定によりその反駁 $f$ が存在します．

$$f(\alpha \supset \beta) = f(\alpha) \supset f(\beta) = f(\alpha) \supset \top = \top$$

なので，$f$ は $\Gamma \to \Theta$ の反駁になっています． □

体系 HK と LK の同等性の定理を使えば，次の定理が得られます．

**定理 1.4.8**　任意の論理式 $\alpha$ に対して，
$\alpha$ が体系 HK で証明できる $\iff$ $\alpha$ はトートロジーである．

直観主義論理では，公理型 P の述部が証明できないので，この節で述べたような真と偽の 2 値の意味論では完全性定理が成り立ちません．しかし，少し複雑な (といっても，無限値の) 意味論を考えると，直観主義論理の完全性がいえます．その意味論について知りたい人は第 4 章を見てください．

健全性や完全性は論理の体系がもつべき望ましい性質ですが，もう 1 つ論理の体系がもっていたほうがいい性質に独立性があります．形式的体系のある公理型が独立であるとは，その体系で証明できる式で，その体系からその公理型を取り除いて得られる体系では証明できないものがあることです．形式的体系のある推論規則が独立であるとは，その体系で証明できる式で，その体系からその推論規則を取り除いて得られる体系では証明できないものがあることです．そして，形式的体系が独立 (**independent**) であるとは，その体系のすべての公理型とすべての推論規則が独立であることです．端的にいうと，体系が独立であるというのは，公理型や推論規則に無駄がないことです．いま，独立性は論理の体系がもっていたほ

うがいい，と述べたばかりですが，体系LJとLKは独立ではありません．ゲンツェンの基本定理は推論規則cutが独立でないことを主張しています．はじめから体系LJとLKからcutを取り除いた体系をLJとLKと呼ぶことにしていればよかったのでは，と思うかも知れませんが，そうすると本書のここまでの構成を大幅に変えなければならなくなります．このように，独立性というのは絶対に必要な条件ではないので，簡便性や対称性などを優先して独立性は犠牲にされることがあります．自然推論の体系が独立なことはほとんど明らかでしょう．ヒルベルト流の体系については，独立性の定義は主部を無視して考えます．次の問題は容易に解くことができます．

▶ **問題 1.4.9**　体系HKが独立ならば，体系HJが独立であることを示せ．
(ヒント：まず“体系HKが独立ならば”という条件なしに，体系HJで推論規則MPが独立であることを示す．)

体系HKは独立ですが，その証明はかなりむずかしい問題です．たとえば，公理型Kが独立であることを示すには，体系HKからKを取り除いた体系で証明できる論理式はすべて正しく，論理式 $p \supset q \supset p$ が正しくないような意味論を考えなくてはなりません．意欲ある人は次の問題に取り組んでください．

▶ **問題 1.4.10**　体系HKが独立であることを証明せよ．

# 第2章　述語論理

## 2.1. 述語論理の体系

命題論理では，簡単な命題からより複雑な命題をつくるための接続詞である「ならば」,「かつ」,「または」や助動詞である「でない」などを扱ってきました．述語論理では，それらに加えて「すべての」と「が存在する」の意味や性質について研究します．

### 2.1.1　第一階述語論理の言語

命題論理の範囲では，その中で数学の理論を展開するには使える言語が不十分です．たとえば，自然数論を展開しようとすると，「どのような数 $x$ についても，ある数 $y$ が存在して，$2y < x$ かつ $x < 2y + 3$ となっている」のような命題が書けなければなりません．この命題は第一階述語論理の言語を使うと，

$$\forall v_0 \exists v_1 (2 \cdot v_1 < v_0 \wedge v_0 < 2 \cdot v_1 + 3)$$

と表すことができます．この中には 3 つの論理記号 $\forall, \exists, \wedge$ と，2 つの個体変数 $v_0, v_1$ と，1 つの述語記号 $<$ と，2 つの関数記号 $\cdot$, $+$ と，3 つの定数記号 1, 2, 3 が現れています．関数記号 $\cdot$ と $+$ はともに引数を 2 つ取るので，2 変数の関数記号または 2 項関数記号とよばれます．述語記号 $<$ も 2 つの引数を取るので，2 変数の述語記号または 2 項述語記号とよばれます．定数記号は 0 変数の関数記号と見なすことができますので，本書ではそのように取り扱います．

述語論理では代入の概念も重要です．たとえば，論理式

$$\forall v_0 (v_1 < v_0 \supset \forall v_1 (v_0 < 2 \cdot v_1 + 3)) \tag{2.1}$$

の変数 $v_1$ に $2 \cdot v_0 + 1$ を代入することを考えます．そのとき，(2.1) 式の中の $\forall v_1$ に現れる $v_1$ を置き換えるのは論外としても，$v_0 < 2 \cdot v_1 + 3$ に現れる $v_1$ も置き換えてはいけません．それは $v_0 < 2 \cdot v_1 + 3$ に現れる $v_1$ は $\forall v_1$ により束縛されているからです．また，(2.1) 式の $v_1 < v_0$ の部分の $v_1$ をそのまま $2 \cdot v_0 + 1$ に置き換えると束縛されてはいけない $2 \cdot v_0 + 1$ の $v_0$ が束縛されてしまいます．そのために，まず (2.1) 式の束縛変数 $v_0$ を $v_2$ に置き換えて次の式を得ます：

$$\forall v_2 (v_1 < v_2 \supset \forall v_1 (v_2 < 2 \cdot v_1 + 3)). \tag{2.2}$$

(2.1) 式から (2.2) 式を得る変換を論理式の $\alpha$-変換といいます．$\alpha$-変換により論理式の意味は全く変わりません．すでに，ラムダ計算のところで (26 ページ) ラムダ項の $\alpha$-変換という概念が出てきたことを思い出してください．そして，(2.2) 式の束縛されていない個体変数 $v_1$ を $2 \cdot v_0 + 1$ に置き換えて

$$\forall v_2(2 \cdot v_0 + 1 < v_2 \supset \forall v_1(v_2 < 2 \cdot v_1 + 3)) \tag{2.3}$$

が得られます．これが (2.1) 式の変数 $v_1$ に $2 \cdot v_0 + 1$ を正しく代入した結果です．この段落では定義されていない言葉がいくつか出てきましたが，「だいたいそんなものか」という程度に感じがつかめれば十分です．

形式的な自然数論を展開するには，まず使われる論理記号，個体変数，述語記号，関数記号を決め，論理式の概念を定義し，公理と推論規則を決める必要があります．公理と推論規則の中には自然数論に特有なものと，どのような理論にも共通なものとがあります．述語論理の仕事はすべての理論に共通な論理的な性質を調べることなので，どのような理論にも共通な公理や推論規則に興味があるのです．論理記号と個体変数はどの理論にも共通な記号です．述語記号と関数記号は扱われる理論によって変わってきます．たとえば，数学全体がその中で展開できるといわれている集合論は，2 項述語記号 $\in$ だけで形式化できます．

一般に論理記号，個体変数，述語記号，関数記号を決めることを**第一階述語論理の言語 (first order language)** を決めるといいます．論理記号と個体変数とはどの理論にも共通なので，実質的には，使われる述語記号，関数記号を決めることが第一階述語論理の言語を決めることです．以下では，第一階述語論理の言語を単に**言語**ということにします．以上のことを念頭において，以下の論理式の定義までの記述を読んでください．

言語 $\mathcal{L}$ の**基本記号 (primitive symbol)** には個体変数，述語記号，関数記号，論理記号，その他の記号の 5 種類のものがあります．

**個体変数 (individual variable)**　可算個の変数 $v_0, v_1, v_2, \cdots$
**述語記号 (predicate symbol)**　各 $n$ について，$n$ 変数の述語記号 ($n$-ary predicate symbol)
**関数記号 (function symbol)**　各 $n$ について，$n$ 変数の関数記号 ($n$-ary function symbol)
**論理記号 (logical symbol)**　$\supset, \bot, \forall$
**その他の記号**　( , )

命題論理のときと同様に，論理記号 '$\bot$' を命題定数といいます．$n$ 変数の関数記号は 1 つもないこともあります．また，その個数が有限個の場合も無限にある場合もあります．$n$ 変数の述語記号についても同じことがいえます．CL-項やラムダ項を構成する変数と論理式を構成する個体変数とは全く別のものですが，論理式を構成する個体変数を表すメタ変数として '$x$', '$y$', '$z$', '$u$', '$v$', '$x_0$', '$y_0$' などを用います．CL-項を構成する変数を表すメタ変数なのか，論理式を構成する個体変数を表すメタ変数なのかは，普通は文脈から判断できます．項とその項に現れる個体変数の集合 $FV$ を同時に帰納的に定義します．

**定義 2.1.1（項（term））**

1. 個体変数は言語 $\mathcal{L}$ の項である．

$$FV(x) = \{x\}.$$

2. $t_1, \cdots, t_n$ が言語 $\mathcal{L}$ の項であり，$f$ が言語 $\mathcal{L}$ の $n$ 変数の関数記号ならば，$(ft_1 \cdots t_n)$ は言語 $\mathcal{L}$ の項である．

$$FV((ft_1 \cdots t_n)) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n).$$

ここで，$t_1, \cdots, t_n$ は項を表すメタ変数です．$s, t, s_1, t_1, \cdots$ などを項を表すメタ変数として使用します．また，$f$ は関数記号を表すメタ変数です．$f, g, f_0, g_0, \cdots$ などを関数記号を表すメタ変数として使用します．

この定義の 2 は，$f$ が 0 変数の関数記号のときは，$(f)$ が項であることも含んでいることに注意してください．0 変数の関数記号のことを定数記号ともいいます．$(ft_1 \cdots t_n)$ を $f(t_1, \cdots, t_n)$ と書くこともありますが，それは本当は $(ft_1 \cdots t_n)$ と書くべきところを，(長くなってしまうのに省略というのも変だが) 省略してそのように書いている，と思ってください．また，誤解の恐れのないときは，$(ft_1 \cdots t_n)$ の一番外側の括弧を省略して $ft_1 \cdots t_n$ と書くこともあります．とくに，$f$ が定数記号のときは，項 $(f)$ の括弧は普通は省略して $f$ と書きます．

**論理式 (formula)** と狭い意味の部分論理式は，命題論理のときとほぼ同様に，帰納的に定義されます (一緒に，論理式に現れる自由変数の集合 $FV$ と束縛変数の集合 $BV$ も定義します)．

**定義 2.1.2（論理式）**

1. 命題定数 $\bot$ は言語 $\mathcal{L}$ の論理式である．

$$FV(\bot) = BV(\bot) = \emptyset.$$

2. $p$ が言語 $\mathcal{L}$ の $n$ 変数の述語記号で $t_1, \cdots, t_n$ が言語 $\mathcal{L}$ の項ならば，$pt_1 \cdots t_n$ は言語 $\mathcal{L}$ の論理式である．

$$FV(pt_1 \cdots t_n) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n) \quad \text{かつ} \quad BV(pt_1 \cdots t_n) = \emptyset.$$

3. $\alpha$ と $\beta$ が言語 $\mathcal{L}$ の論理式ならば，$(\alpha \supset \beta)$ は言語 $\mathcal{L}$ の論理式である．

$$FV((\alpha \supset \beta)) = FV(\alpha) \cup FV(\beta) \quad \text{かつ} \quad BV((\alpha \supset \beta)) = BV(\alpha) \cup BV(\beta).$$

4. $\alpha$ が言語 $\mathcal{L}$ の論理式で $x$ が個体変数ならば，$\forall x\alpha$ は言語 $\mathcal{L}$ の論理式である．

$$FV(\forall x\alpha) = FV(\alpha) - \{x\} \quad \text{かつ} \quad BV(\forall x\alpha) = BV(\alpha) \cup \{x\}.$$

命題定数 $\bot$ と $pt_1 \cdots t_n$ の形の論理式のことを**原子論理式 (atomic formula)** といいます．すでに黙って行っていますが，「言語 $\mathcal{L}$ の」という文句はよく省略されます．

**定義 2.1.3（狭い意味の部分論理式）**　言語 $\mathcal{L}$ を固定します．そして，以下の定義では，「言語 $\mathcal{L}$ の」と「狭い意味の」という文句は省略します．

1. 論理式 $\alpha$ は 論理式 $\alpha$ の部分論理式である．
2. $\alpha$ と $\beta$ が論理式のとき，$\alpha$ の部分論理式は $(\alpha \supset \beta)$ の部分論理式である．また，$\beta$ の部分論理式も $\alpha \supset \beta$ の部分論理式である．
3. $\alpha$ が論理式で $x$ が個体変数ならば，$\alpha$ の部分論理式は $\forall x\alpha$ の部分論理式である．

$p$ は述語記号を表すメタ変数です．述語記号を表すメタ変数として $p, q, r, p_0, q_0, \cdots$ を用います．今後はとくに断りがないときは，個体変数を表す異なるメタ変数は異なる個体変数を，述語記号を表す異なるメタ変数は異なる述語記号を，関数記号を表す異なるメタ変数は異なる関数記号をそれぞれ表すものとします．命題論理のときと同様に，$\alpha$ と $\beta$ は論理式を表すメタ変数です．$\alpha, \beta$ などのギリシャ文字の小文字を論理式を表すメタ変数として使用します．括弧の省略の仕方も命題論理のときと同様です．すなわち，$p \supset q \supset \forall x\, rx \supset q_0$ は

$$(p \supset (q \supset (\forall x\, rx \supset q_0)))$$

を表しています．論理式に含まれる論理記号 $\supset$ と $\forall$ の個数をその論理式の**長さ (length)** といいます．たとえば，論理式

$$p \supset q \supset \forall x\, rx \supset q_0$$

の長さは 4 です．

**定義 2.1.4（束縛された出現と自由な出現）**　論理式 $\alpha$ の狭い意味の部分論理式 $\forall x\beta$ の中の個体変数 $x$ の出現を，論理式 $\alpha$ の中の**束縛された出現**という．束縛されていない個体変数 $x$ の出現を**自由な出現**という．

論理式 $\alpha$ と個体変数 $x$ に対して，$x \in BV(\alpha)$ のとき変数 $x$ は $\alpha$ の**束縛変数 (bound variable)** であるといいます．このとき論理式 $\alpha$ の中に変数 $x$ の束縛された出現が 1 回以上あります．論理式 $\alpha$ に対して，$FV(\alpha)$ は $\alpha$ の中に自由な出現が 1 回以上ある個体変数をすべて集めた集合になっています．$FV(\alpha)$ の元を $\alpha$ の**自由変数 (free variable)** といいます．自由変数を全く含まない論理式のことを**閉論理式 (closed formula)** といいます．たとえば，論理式

$$\forall v_1\, v_0 = v_1 \supset v_1 = v_1$$

の束縛変数は $v_1$ で，自由変数は $v_0$ と $v_1$ です．また，論理式

$$\forall v_1\ (v_0 = v_1 \supset v_1 = v_1)$$

の束縛変数は $v_1$ で，自由変数は $v_0$ だけです．

狭い意味の部分論理式はすでに定義しましたが，**部分論理式 (subformula)** の定義は代入を使って定義します．以下の 2 つの定義では言語 $\mathcal{L}$ を固定します．そしてその定義の中では，「言語 $\mathcal{L}$ の」という文句は省略します．

**定義 2.1.5（個体変数への項の代入）** $x$ を個体変数，$t$ を項とする．論理式 $\alpha$ の自由に現れる $x$ に項 $t$ を代入した結果 $[t/x]\alpha$ を帰納的に定義する：

1. $\alpha$ が原子論理式のときは $[t/x]\alpha$ は $\alpha$ に現れる $x$ をすべて項 $t$ で置き換えたものである，
2. $[t/x](\beta \supset \gamma) \equiv ([t/x]\beta \supset [t/x]\gamma)$,
3. $[t/x]\forall x\beta \equiv \forall x\beta$,
4. $[t/x]\forall y\beta \equiv \forall y[t/x]\beta \quad (y \notin FV(t)$ のとき$)$,
5. $[t/x]\forall y\beta \equiv \forall z[t/x][z/y]\beta$.

ここで $z$ は $FV(\alpha) \cup BV(\alpha) \cup FV(t) \cup \{x, y\}$ の中にはない最初の変数である (変数は '$v_0$', '$v_1$', '$v_2$', $\cdots$ の順に並べられている).

**定義 2.1.6（部分論理式）**

1. 論理式 $\alpha$ の狭い意味の部分論理式は $\alpha$ の部分論理式である，
2. $\alpha$ を論理式，$x$ を個体変数，$t$ を項とする．そのとき，$[t/x]\alpha$ の部分論理式は $\forall x\alpha$ の部分論理式である．

束縛変数を別の個体変数に置き換えることを **(論理式の) $\alpha$-変換**といいます．正確な定義はラムダ項の $\alpha$-変換と同様に定義できます．論理式 $\alpha$ が論理式 $\beta$ から $\alpha$-変換により得られるとき，$\alpha$ と $\beta$ は $\alpha$-同値であるといい，

$$\alpha \equiv_\alpha \beta$$

と書きます．関係 $\equiv_\alpha$ は同値関係となります．

▶ **問題 2.1.7** *

1. $[fv_0/v_0](\forall v_1\ pv_0v_1 \supset \forall v_0\ pv_0v_0)$ はどんな論理式か．
2. $[fv_1/v_0]\forall v_1\ pv_0v_1$ はどんな論理式か．

- $\neg\alpha$ は $\alpha \supset \perp$ を，
- $\alpha \wedge \beta$ は $\neg(\alpha \supset \neg\beta)$ を，
- $\alpha \vee \beta$ は $(\alpha \supset \beta) \supset \beta$ を，
- $\alpha \leftrightarrow \beta$ は $(\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$ を，

- $\exists x\ \alpha$ は $\neg\forall x\neg\alpha$ を，

それぞれ略して書いたものとします．¬, ∧, ∨, ↔ はすでに命題論理のところで出てきましたね．∃ は「存在する」を表す論理記号です．また，ここまでは文字列として異なる論理式は異なるものとして扱ってきました．しかし，証明図の変形を考えるときには，$\alpha$-同値な論理式を異なるものとして扱うと，変形結果が証明図にならなくなるなどの不都合が生じます．そこで，今後は **$\alpha$-同値な論理式を同一視する**ことにします．

### 2.1.2　ヒルベルト流の体系

述語論理についても，まず，ヒルベルト流の古典述語論理の体系 HK について述べます．CL-項の定義に現れる定数に K, S 以外に P, A, F, G, J が含まれているものとします．命題論理のときと同様に，$M$ を CL-項，$\alpha$ を論理式とするとき，$M : \alpha$ という表現を HK の**式**といい，$M$ をその式の**主部 (subject)**，$\alpha$ をその式の**述部 (predicate)** といいます．HK の証明図は式を木状に並べたものです．証明図によって証明されるのは式ですし，その出発点となる公理も式です．

**古典述語論理 (classical predicate logic) HK** の公理型は次の 6 つです．

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{K} : \alpha \supset \beta \supset \alpha \\
&\mathsf{S} : (\alpha \supset \beta \supset \gamma) \supset (\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \gamma \\
&\mathsf{P} : ((\alpha \supset \beta) \supset \alpha) \supset \alpha \\
&\mathsf{A} : \bot \supset \alpha \\
&\mathsf{F} : \forall x\alpha \supset [t/x]\alpha \\
&\mathsf{G} : \forall x(\alpha \supset \beta) \supset \alpha \supset \forall x\beta \quad (\alpha\text{には変数 } x \text{ が自由には現れない})
\end{aligned}
$$

公理型 K, S, P, A はすでに命題論理でおなじみのものです．公理型 F と G だけが新たに加わりました．古典述語論理 HK の推論規則は次の 2 つです．

$$\frac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{(MN) : \beta}\ .$$

この推論規則は命題論理ですでに出てきた MP です．

$$\frac{M : \alpha}{\mathsf{J}M : \forall x\alpha} \quad \text{ただし，仮定の述部には変数}x\text{が自由に現れない．}$$

この推論規則は**普遍化規則 (generalization rule)** といいます．証明図だけを考えているときは,「ただし，仮定の述部には変数 $x$ が自由に現れない」という条件は必要ありません．公理でない論理式も上端にくる推論図を考慮に入れるとそのような条件が必要になります．

言語 $\mathcal{L}$ を 0 変数の述語記号 $r_0$ と 1 変数の述語記号 $r_1$ からなる言語とします．次の例は言語 $\mathcal{L}$ の式

$$\mathsf{J}(\mathsf{SG}) : \forall v_0((\forall v_0(r_0 \supset r_1 v_0) \supset r_0) \supset \forall v_0(r_0 \supset r_1 v_0) \supset \forall v_0\ r_1 v_0)$$

に至る証明図です．

例 2.1.8

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{S}:\gamma\supset(\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset r_0)\supset\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset\forall v_0\ r_1v_0 \quad \mathsf{G}:\gamma}{\mathsf{SG}:(\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset r_0)\supset\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset\forall v_0\ r_1v_0}}{\mathsf{J(SG)}:\forall v_1((\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset r_0)\supset\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset\forall v_0\ r_1v_0)}\ ,$$

ただし $\gamma\equiv(\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset r_0\supset\forall v_0\ r_1v_0)$.

式 $M:\alpha$ に至る証明図のことを $M:\alpha$ の証明図といいます．また，式 $M:\alpha$ の証明図が存在するとき，$M:\alpha$ は**証明可能 (provable)** である，といいます．また，述部が $\alpha$ の式が証明可能であるとき，論理式 $\alpha$ は**証明可能 (provable)** であるといい，述部が $\alpha$ の式の証明図のことを論理式 $\alpha$ の証明図といいます．次の例 2.1.9 は例 2.1.8 を省略形で書いたものです．上端にある式以外は主部の CL-項が略されています．例 2.1.9 から例 2.1.8 が完全に再現できるということが重要です．

例 2.1.9

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{S}:\gamma\supset(\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset r_0)\supset\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset\forall v_0\ r_1v_0 \quad \mathsf{G}:\gamma}{(\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset r_0)\supset\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset\forall v_0\ r_1v_0}}{\forall v_1((\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset r_0)\supset\forall v_0(r_0\supset r_1v_0)\supset\forall v_0\ r_1v_0)}\ .$$

例 2.1.9 において原子論理式 $r_0, r_1v_0$ にメタ変数 $\alpha,\beta$ をそれぞれ代入し，変数 $v_0$, $v_1$ にもそれぞれメタ変数 $x$, $y$ を代入した図形

$$\cfrac{\cfrac{\mathsf{S}:(\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\forall x\beta)\supset(\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\forall x\beta \quad \mathsf{G}:\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha\supset\forall x\beta}{(\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\forall x\beta}}{\forall y((\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\forall x\beta)}$$

を考えます．この図形から，任意の論理式 $\alpha,\beta$ と任意の変数 $x$ に対して，$x$ が $\alpha$ に自由に現れなければ論理式

$$\forall y((\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\forall x\beta)$$

が証明可能であることが分かります．命題論理のときと同様に，このことを単に，変数 $x$ が $\alpha$ に自由に現れなければ論理式 $\forall y((\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\forall x\beta)$ が証明可能である，といいます．この図形のことを $\forall y((\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\forall x\beta)$ の証明図といいます．また $\forall y((\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\alpha)\supset\forall x(\alpha\supset\beta)\supset\forall x\ \beta)$ のような式をメタ論理式といいます．しかし，メタ論理式のことを単に論理式ということもよくあります．そのときは各メタ変数に論理式や変数が代入されたものを想定しています．

### 2.1.3 演繹定理

述語論理でも演繹定理が成り立ちます．実をいうと，演繹定理が成り立つように普遍化規則に条件をつけたのです．

$\Gamma$ を主部が変数の式の列とします．$\Gamma$ に含まれる式と公理とを上端とし，$M:\alpha$ に至る推

論図があるとき，

$$\Gamma \vdash_{HK} M : \alpha$$

と書き，HK で仮定 $\Gamma$ から $M : \alpha$ が出るといいます．公理以外で上端にあるものはすべて $\Gamma$ に入っていなければいけませんが，実際に上端にない主部が変数の式が $\Gamma$ に入っていてもかまいません．$\Gamma$ に主部が変数の式の列という制限をつけたおかげで，$\Gamma \vdash_{HK} M : \alpha$ のときにそれを示す推論図の形が CL-項 $M$ により決定されます．

$\Gamma(\equiv \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を論理式の列，$\beta$ を論理式とします．

$$z_1 : \alpha_1, \cdots, z_n : \alpha_n \vdash_{HK} M : \beta$$

となる変数 $z_1, \cdots, z_n$ と CL-項 $M$ が存在するとき，

$$\Gamma \vdash_{HK} \beta$$

と書きます．

命題論理のときと同様に，演繹定理を証明するために，CL-項 $M$ に対して，変数 $x$ を含まない CL-項 $N$ を与える変換である**抽象 (abstraction)** を定義します．

**定義 2.1.10（抽象）**　$M$ を CL-項，$x$ を変数とする．変数 $x$ を含まない項 $(\lambda^* x.M)$ を以下のように帰納的に定義する：

1. $(\lambda^* x.M) \equiv (\mathsf{K}M)$　$(x \notin FV(M)$ のとき$)$,
2. $(\lambda^* x.x) \equiv \mathsf{I}$　(ただし $\mathsf{I} \equiv \mathsf{SKK}$),
3. $(\lambda^* x.\mathsf{J}U) \equiv \mathsf{G}(\mathsf{J}(\lambda^* x.U))$,
4. $(\lambda^* x.UV) \equiv \mathsf{S}(\lambda^* x.U)(\lambda^* x.V)$ .

**定理 2.1.11（演繹定理）**　$x : \alpha, \Gamma \vdash_{HK} M : \beta$ かつ $\Gamma$ の主部に変数 $x$ が現れないならば，

$$\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.M : \alpha \supset \beta$$

である．

**証明**　$\lambda^* x.M$ の定義による帰納法で証明します．

1. $x \notin FV(M)$ ときは，命題論理のときと同様です．
2. $M \equiv x$ のときも，命題論理のときと同様です．
3. $M \equiv \mathsf{J}U$ のときは，$x : \alpha, \Gamma \vdash_{HK} M : \beta$ を示す推論図は

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ U : \gamma\end{array}}{\mathsf{J}U : \forall y \gamma}$$

という形をしています．$x \in FV(\mathsf{J}U)$ なので $x : \alpha$ は $\Pi$ の落ちていない仮定になっています．

よって $\alpha$ には変数 $y$ は自由には現れていません．帰納法の仮定により，$\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.U : \alpha \supset \gamma$ です．それぞれを示す推論図を，$\Pi_1$ とします．次の推論図が $\Gamma \vdash_{HK} \lambda^* x.M : \alpha \supset \beta$ を示しています．

$$\dfrac{\mathsf{G} : \forall y(\alpha \supset \gamma) \supset \alpha \supset \forall y \gamma \quad \dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \lambda^* x.U : \alpha \supset \gamma\end{matrix}}{\mathsf{J}(\lambda^* x.U) : \forall y(\alpha \supset \gamma)}}{\mathsf{G}(\mathsf{J}(\lambda^* x.U)) : \alpha \supset \forall x \gamma}.$$

4. $M \equiv UV$ のときは，命題論理のときと同様です． □

### 2.1.4 直観主義述語論理の自然推論

1930 年代にゲンツェンが考えた自然推論の体系は述語論理の体系です．命題論理のところでは，その $\{\supset, \bot\}$-断片を紹介したのでした．ここでは，その $\{\supset, \bot, \forall\}$-断片を紹介します．

命題論理のときと同じく，公理が全くなくても，MP と普遍化規則とその逆の規則と演繹定理を形式化して得られる推論規則の 4 つだけで，HK の公理型のうち P と A 以外は証明できてしまいます．公理型 A については，命題論理のときと同じく，推論規則 $\bot$-E を付け加えることにします．そのようにして得られる体系は古典述語論理 HK から公理型 P を取り除いたものと同等なものになります．ヒルベルト流の述語論理の体系 HK の公理型から公理型 P を取り除くと直観主義述語論理[1]の体系が得られます．その体系を HJ とよびます．命題論理のときと同様に，体系 HJ でも演繹定理が成り立っています．体系 HJ に対応する自然推論の体系 NJ を提示します．

まず，式の主部は命題論理のときと同様にラムダ項です．定数記号には ‘A’, ‘J’, ‘F’ の 3 つが含まれているものとします．

**定義 2.1.12 (NJ の推論図)**

1. 主部が変数の式が 1 つ書かれている図形は推論図である．
2. 推論図 $\Pi_1$ の一番下に現れる式が $M : \alpha \supset \beta$ で，推論図 $\Pi_2$ の一番下に現れる式が $N : \alpha$ のとき，次の図形は推論図である：

$$\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{(MN) : \beta}.$$

このとき，使われた推論規則は $\supset$-E であるといい，推論規則は

$$\dfrac{M : \alpha \supset \beta \quad N : \alpha}{MN : \beta}$$

と書かれる．

3. 推論図 $\Pi$ の中の落ちていない仮定のうちで，主部が変数 $x$ の式の述部は $\alpha$ だけとする (主部が変数 $x$ の式が現れなくてもよい)．また，$\Pi$ の一番下に現れる

1) 正確には直観主義述語論理の $\{\supset, \bot, \forall\}$-断片というべきところです．

式が $M:\beta$ であるとする．このとき次の図形は推論図である：

$$\frac{\Pi}{(\lambda x.M):\alpha\supset\beta}\ .$$

このとき，使われた推論規則は ⊃-I であるといい，推論規則は

$$\frac{\begin{array}{c}x:\alpha\\ \Pi\\ M:\beta\end{array}}{\lambda x.M:\alpha\supset\beta}$$

と書かれる．この推論規則を使うまでは落ちていなかった仮定 $x:\alpha$ は (複数個あればすべて)，この推論規則を使った結果，落ちた **(discharged)** という．

4. $\Pi$ を一番下に現れる式が $M:\bot$ の推論図で，$\alpha$ を任意の論理式とします．このとき次の図形は推論図である：

$$\frac{\Pi}{(\mathsf{A}M):\alpha}\ .$$

このとき，使われた推論規則は ⊥-E であるといい，推論規則は

$$\frac{M:\bot}{\mathsf{A}M:\alpha}$$

と書かれる．

5. 推論図 $\Pi$ の一番下に現れる式が $M:\alpha$ であるとします．また，$\Pi$ の落ちていない仮定の述部には変数 $x$ は自由に現れないものとします．このとき次の図形は推論図である：

$$\frac{\Pi}{(\mathsf{J}M):\forall x\alpha.}$$

このとき，使われた推論規則は ∀-I であるといい，推論規則は

$$\frac{M:\alpha}{\mathsf{J}M:\forall x\alpha}$$

と書かれる．

6. 推論図 $\Pi$ の一番下に現れる式が $M:\forall x\alpha$ であるとします．このとき次の図形は推論図である：

$$\frac{\Pi}{(\mathsf{F}M):[t/x]\alpha.}$$

このとき，使われた推論規則は ∀-E であるといい，推論規則は

$$\frac{M:\forall x\alpha}{\mathsf{F}M:[t/x]\alpha}$$

と書かれる．

推論規則 ⊃-E, ⊥-E および ∀-E が消去規則 **(elimination rule)** です．また，推論規則 ⊃-I と ∀-I が導入規則 **(introduction rule)** です．推論規則 ⊃-E の 2 つの前提 $\alpha\supset\beta$ と $\alpha$

については，$\alpha \supset \beta$ は**主前提 (major premiss)** とよばれ，$\alpha$ は**副前提 (minor premiss)** とよばれます．また，前提が 1 つしかない推論規則についてもその前提を主前提ということにします．推論規則 $\forall$-I における個体変数 $x$ を**固有変数 (eigenvariable)** といいます．述語論理の体系 NJ の推論図を正規形に変形する際に，固有変数を変更しなければばらないときがあります．そのときは，推論規則 $\forall$-I の結論の論理式を $\alpha$-変換する必要があります．

すべての仮定が落ちている NJ の推論図を NJ の**証明図**といいます．式 $M : \alpha$ の証明図が存在するとき，$M : \alpha$ は**証明可能 (provable)** である，といいます．また，述部が $\alpha$ である式が証明可能であるとき，論理式 $\alpha$ は**証明可能 (provable)** であるといい，その式の証明図のことを論理式 $\alpha$ の証明図といいます．

▶ **問題 2.1.13** * 直観主義述語論理の体系 NJ における，次の論理式の証明図を描け．

1．HJ の公理型 F,
2．HJ の公理型 G,
3．$\forall xpx \supset \forall x \neg px \supset q$,
4．$\forall x\, px \supset \neg \forall x \neg\neg px \supset q$,
5．$\forall x(\neg pxx \supset pxy) \supset \forall x(pxy \supset \neg pxx) \supset pyy$,
6．$\forall x(\neg pxx \supset pxy) \supset \neg \forall x(pxy \supset \neg pxx)$.

$\Gamma$ を式の列とします．式 $M : \alpha$ に至る NJ の推論図があり，その落ちていない仮定がすべて $\Gamma$ に含まれるとき，

$$\Gamma \vdash_{NJ} M : \alpha$$

と書き，NJ で仮定 $\Gamma$ から $M : \alpha$ が出るといいます．また，その推論図を $\Gamma$ から $M : \alpha$ に至る推論図といいます．落ちていない仮定はすべて $\Gamma$ に入っていなければいけませんが，落ちてしまった仮定や変数が主部の式ならば上端にないものが $\Gamma$ に入っていてもかまいません．$\Gamma(\equiv \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を論理式の列，$\beta$ を論理式とします．

$$z_1 : \alpha_1, \cdots, z_n : \alpha_n \vdash_{NJ} M : \beta$$

となる変数 $z_1, \cdots, z_n$ と CL-項 $M$ が存在するとき，

$$\Gamma \vdash_{NJ} \beta$$

と書きます．

体系 HJ の演繹定理と HJ の公理型がすべて NJ で証明可能なことから，次の HJ と NJ の同等性を述べている定理は簡単に証明できます．

**定理 2.1.14** $\Gamma$ を論理式の列とするとき，次の 2 つの条件は同値である：
1. $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$,
2. $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$.

▶ **問題 2.1.15**　定理 2.1.14 を証明せよ．

▶ **問題 2.1.16***　次の論理式に至る古典述語論理の体系 NK の証明図を描け．ここで，古典述語論理の体系 NK は直観主義述語論理の体系 NJ に次の二重否定の除去規則を付け加えたものである：

$$\frac{M : \neg\neg\alpha}{\mathsf{D}M : \alpha}\ .$$

1. $\forall x(px \supset q) \supset \exists x\, px \supset q$,
2. $\forall x((px \supset r) \supset q) \supset \neg q \supset \forall x\, px$,
3. $\forall x(\neg px \supset q) \supset \neg\forall x\, px \supset q$,
4. $\forall x((px \supset q) \supset q) \supset (\forall x\, px \supset q) \supset q$.

### 2.1.5　NJ の推論図の変形と正規化定理

直観主義述語論理の自然推論の体系 NJ の式の主部のラムダ項は定数記号 ‘J’ と ‘F’ が現れる可能性があるので，それについての変形規則を付け加える必要があります．$\beta$-変形の体系 $\lambda\beta$ に次の公理型を加えた体系が $\beta$J-変形の体系 $\lambda\beta$J です．

$$(\mathsf{J})\qquad \mathsf{F}(\mathsf{J}M) \rhd_1 M$$

体系 $\lambda\beta$J における正規形などの定義は体系 $\lambda\beta$ におけるものと全く同様に定義できます．そのとき，ラムダ項が正規形であるのは，その中に $(\lambda x.M)N$ という形の部分も $\mathsf{F}(\mathsf{J}M)$ という形の部分ももたないときです．

推論図 $\Pi$ の中で，ある論理式の出現が導入規則の結論になっていて，しかも消去規則の主前提にもなっているとき，その論理式 (の出現) を $\Pi$ の**極大論理式 (maximum formula)** といいます．極大論理式をもたない推論図のことを**正規な (normal)** 推論図といいます．命題論理のときは，論理記号 $\supset$ についての変形だけでよかったのですが，述語論理では論理記号 $\forall$ についての変形も考える必要があります．

**定義 2.1.17（NJ の推論図の $\beta$J-変形）**　$\beta$J-変形には次の 2 つがある．

NJ の推論図の中に現れる次のような部分

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} x : \alpha \\ \Pi_1 \\ M : \beta \end{matrix}}{\lambda x.M : \alpha \supset \beta} \quad \begin{matrix} \Pi_2 \\ N : \alpha \end{matrix}}{(\lambda x.M)N : \beta}$$

を

$$\begin{matrix} \Pi_2 \\ N : \alpha \\ [N/x]\Pi_1 \\ [N/x]M : \beta \end{matrix}$$

に変えることを極大論理式 $\alpha \supset \beta$ での $\beta$J-変形 ($\beta$J-reduction) という．ただし，$\Pi_2$

の落ちていない仮定の述部に自由に現れる個体変数が $[N/x]\Pi_1$ の中で固有変数として現れる可能性があり，そのときは得られた図形が推論図ではない．その場合は，その固有変数を与えられた推論図に表れない個体変数で置き換える．

NJ の推論図の中に現れる次のような部分

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Pi\\ M:\alpha\end{matrix}}{\mathsf{J}M:\forall x\alpha}}{\mathsf{F}(\mathsf{J}M):[t/x]\alpha}$$

を

$$\begin{matrix}[t/x]\Pi\\ M:[t/x]\alpha\end{matrix}$$

に変えることを $\forall x\alpha$ での $\beta$J-変形 ($\beta$J-reduction) という．ここで，$[t/x]\Pi$ は証明図 $\Pi$ の述部に自由に現れる変数 $x$ に項 $t$ を代入して得られる証明図である．この場合も，極大論理式 $\alpha\supset\beta$ での $\beta$J-変形のときと同様に，固有変数の置き換えをしないと推論図にならない場合がある．そのときは置き換えを行う．

$\forall x\alpha$ での $\beta$J-変形については次のことに注意してください．「$\Pi$ の落ちていない仮定には変数 $x$ は自由に現れない」という条件があるために，代入 $[t/x]\Pi$ では落ちていない仮定には代入が起こりません．

ある推論図から出発して命題論理で行ったような変形を繰り返して正規な推論図が得られたとします．そのとき，その正規な推論図を元の推論図の**正規形 (normal form)** といいます．正規化定理の証明は命題論理のときと全く同じです．

**定理 2.1.18 (NJ の正規化定理 (Normalization theorem for NJ))** NJ の推論図は何回かの $\beta$J-変形を行うことにより正規形にすることができる．

**証明** 推論図に含まれる極大論理式の中で最も長いものの長さを $l$ とします．また，推論図に含まれる長さ $l$ の極大論理式の個数を $n$ とします．$l$ と $n$ に関する二重帰納法で証明します．

推論図の中から長さ $l$ の極大論理式を選びます．ただし，その極大論理式 ($\alpha\supset\beta$ または $\forall x\alpha$ の形です) が $\alpha\supset\beta$ という形のときは，横繋がり推論図には長さ $l$ の極大論理式がないものを選びます．その極大論理式での $\beta$J-変形を行います．その結果得られる推論図では，新たに $\alpha$ または $[t/x]\alpha$ が極大論理式となる可能性がありますが，長さ $l$ の極大論理式の数は $n-1$ に減ります．帰納法の仮定により，この推論図は何回かの $\beta$J-変形を行うことにより正規形にすることができます． □

### 2.1.6 ゲンツェン流の体系 LK

述語論理の体系 LK は命題論理の LK に 2 つの推論規則を付け加えることにより得られます．以下では，ギリシャ文字の大文字 $\Gamma$, $\Delta$, $\Theta$, $\Lambda$ は論理式の有限列 (空列も含む) を表しています．

ゲンツェン流の古典述語論理 LK の公理型は次の 2 つです．

$$(I) \quad \alpha \to \alpha$$
$$(N) \quad \bot \to \Theta$$

公理型の中のメタ変数に具体的な論理式を代入すると公理が得られます．ゲンツェン流の体系では，公理のことを**始式 (initial sequent)** ともいいます．

ゲンツェン流の古典述語論理 LK の推論規則は全部で 11 個あり，構造に関するものと論理記号に関するものとに大きく分類されています．構造に関するものが 7 つ，論理記号に関するものが 4 つあります．

**構造に関する推論規則**

**割増 (weakening)**

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\alpha,\, \Gamma \to \Theta}\ (w \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\, \alpha}\ (\to w)$$

**縮約 (contraction)**

$$\frac{\alpha, \alpha,\, \Gamma \to \Theta}{\alpha,\, \Gamma \to \Theta}\ (c \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta,\, \alpha,\, \alpha}{\Gamma \to \Theta,\, \alpha}\ (\to c)$$

**交換 (exchanging)**

$$\frac{\Delta,\, \alpha,\, \beta,\, \Gamma \to \Theta}{\Delta,\, \beta,\, \alpha,\, \Gamma \to \Theta}\ (e \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta,\, \alpha,\, \beta,\, \Lambda}{\Gamma \to \Theta,\, \beta,\, \alpha,\, \Lambda}\ (\to e)$$

**切断 (cut)**

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\, \alpha \quad \alpha,\, \Delta \to \Lambda}{\Gamma,\, \Delta \to \Theta,\, \Lambda}\ (\mathrm{cut})$$

**論理記号に関する推論規則**

**$\supset$ に関する規則**

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\, \alpha \quad \beta,\, \Delta \to \Lambda}{\alpha \supset \beta,\, \Gamma,\, \Delta \to \Theta,\, \Lambda}\ (\supset\to) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \Theta,\, \beta}{\Gamma \to \Theta,\, \alpha \supset \beta}\ (\to\supset)$$

**$\forall$ に関する規則**

$$\frac{[t/x]\alpha,\, \Gamma \to \Theta}{\forall x\alpha,\, \Gamma \to \Theta}\ (\forall \to) \qquad \frac{\Gamma \to \Theta,\, \alpha}{\Gamma \to \Theta,\, \forall x\alpha}\ (\to \forall)$$

ただし推論規則 $(\to \forall)$ においては，変数 $x$ は推論規則の下式には自由に現れないものと

する．

推件式 $\Gamma \to \Theta$ に至る証明図のことを $\Gamma \to \Theta$ の証明図といいます．推件式 $\Gamma \to \Theta$ のことをその証明図の終式といいます．また，推件式 $\Gamma \to \Theta$ の証明図が存在するとき，$\Gamma \to \Theta$ は**証明可能 (provable)** である，といいます．

▶ **問題 2. 1. 19** * 古典述語論理の体系 LK における，次の推件式の cut を使わない証明図を描け．

1. $\forall x(px \supset q),\ \exists x\, px \to q$,
2. $\forall x((px \supset r) \supset q),\ \neg q \to \forall x\, px$,
3. $\forall x(px \supset q),\ \exists x\, px \to q$,
4. $\forall x((px \supset r) \supset q),\ \neg q \to \forall x\, px$.

### 2. 1. 7 ゲンツェン流の体系 LJ

命題論理のときと同様に，直観主義論理の体系 LJ[2] は古典述語論理の体系 LK において，推件式の定義を後件は 1 つの論理式からなる，と制限することより得られます．体系 LJ の公理型と推論規則を以下に述べます．

ゲンツェン流の直観主義命題論理 LJ の公理型は次の 2 つです．

$$(I) \quad \alpha \to \alpha$$
$$(N) \quad \bot \to \alpha$$

ゲンツェン流の直観主義述語論理 LJ の推論規則は全部で 8 つあります．構造に関するものが 4 つ，論理記号に関するものが 4 つあります．

#### 構造に関する推論規則

**割増 (weakening)**

$$\frac{\Gamma \to \gamma}{\alpha,\ \Gamma \to \gamma}\ (w \to)$$

**縮約 (contraction)**

$$\frac{\alpha,\ \alpha,\ \Gamma \to \gamma}{\alpha,\ \Gamma \to \gamma}\ (c \to)$$

**交換 (exchanging)**

$$\frac{\Delta,\ \alpha,\ \beta,\ \Gamma \to \gamma}{\Delta,\ \beta,\ \alpha,\ \Gamma \to \gamma}\ (e \to)$$

**切断 (cut)**

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \alpha,\ \Delta \to \gamma}{\Gamma,\ \Delta \to \gamma}\ (\mathrm{cut})$$

---

2) 正確には $\mathrm{LJ}_{\{\supset,\bot,\forall\}}$ というべきものです．

**論理記号に関する推論規則**

**⊃ に関する規則**

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \beta, \Delta \to \gamma}{\alpha \supset \beta, \Gamma, \Delta \to \gamma} (\supset\to) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \supset \beta} (\to\supset)$$

**∀ に関する規則**

$$\frac{[t/x]\alpha, \Gamma \to \gamma}{\forall x\alpha, \Gamma \to \gamma} (\forall\to) \qquad \frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \forall x\alpha} (\to\forall)$$

推論規則 $(\to\forall)$ においては，変数 $x$ は推論規則の下式には自由に現れないものとする．

> **定理 2.1.20**　$\Gamma$ を論理式の列とするとき，次の 3 つの条件は同値である：
> 1. $\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明可能である，
> 2. $\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$,
> 3. $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$.

この定理の証明は命題論理のときと同様ですので，演習問題としておきます．

▶ **問題 2.1.21 ***　定理 2.1.20 を証明せよ．

命題論理のところで LK と LJ の派生規則という概念が出てきましたが，そこで述べた派生規則はすべて述語論理でも派生規則になっています．

### 2.1.8　拡張されたグリベンコの定理および HK と LK の同等性

本節の目標は，ヒルベルト流の体系 HK とゲンツェン流の体系 LK との同値性を示している次の定理です．

> **定理 2.1.22**　$\Gamma$ を論理式の列とするとき，次の 2 つの条件は同値である：
> 1. $\Gamma \to \gamma$ が LK で証明可能である，
> 2. $\Gamma \vdash_{HK} \gamma$.

命題論理のときと同様に，ヒルベルト流の体系 HK とゲンツェン流の体系 LK との同値性を，直観主義論理の体系 HJ と LJ との同値性を使って証明します．そのために，グリベンコの定理を述語論理に拡張します．

> **定義 2.1.23**　論理式 $\alpha$ から論理式 $\alpha^*$ への変換を次のように帰納的に定義する：
> 1. $\alpha$ が原子論理式ならば $\alpha^* \equiv \alpha$,
> 2. $(\alpha \supset \beta)^* \equiv \alpha^* \supset \beta^*$,

3. $(\forall x\alpha)^* \equiv \forall x\neg\neg\alpha^*$.

上の定義の 3 を $(\forall x\alpha)^* \equiv \forall x\alpha^*$ としたのでは，拡張されたグリベンコの定理の証明がうまくいきません．

▶ **問題 2.1.24**　$\alpha \to \alpha^*$ と $\alpha^* \to \alpha$ は LK で証明可能であることを示せ．

以下では，$\Delta$ を論理式の列 $\delta_1, \cdots, \delta_n$ とするとき，$\neg\Delta$ により論理式の列 $\neg\delta_1, \cdots, \neg\delta_n$ を，$\Delta^*$ により論理式の列 $\delta_1^*, \cdots, \delta_n^*$ を表します．$\Delta$ が空列のときは $\neg\Delta$ も $\Delta^*$ も空列を表します．この表記法によると，$\neg\Delta^*$ は列 $\neg\delta_1^*, \cdots, \neg\delta_n^*$ を表すことになります．

**定理 2.1.25（拡張されたグリベンコの定理）**　次の 2 つの条件は同値である：
1. $\Gamma \to \Delta$ が LK で証明可能である，
2. $\neg\Delta^*, \Gamma^* \to \bot$ が LJ で証明可能である．

**証明**　$2 \Rightarrow 1$：
$\Delta$ に含まれる論理式の数に関する帰納法で証明します．

$\Delta$ が空のときは，LJ の証明図は LK の証明図でもあるので，$\Gamma^* \to \bot$ は LK で証明可能です．また，問題 2.1.24 から，任意の論理式 $\gamma$ に対して，$\gamma \to \gamma^*$ が証明可能なので，(cut) を何回か使えば $\Gamma \to \bot$ は LK で証明できます．よって公理 $\bot \to$ と (cut) を使えば $\Gamma \to$ は LK で証明できることが分かります．

$\Delta$ を $\Sigma, \delta$ とします．推件式 $\neg\Sigma^*, \neg\delta^*, \Gamma^* \to \bot$ が LJ で証明可能なので，帰納法の仮定により $\neg\delta^*, \Gamma \to \Sigma$ が LK で証明可能です．$\neg\delta^*, \Gamma \to \Sigma$ に至る LK の証明図を $\Pi_1$ とします．また，問題 2.1.24 により $\delta^* \to \delta$ が LK で証明可能です．$\delta^* \to \delta$ に至る LK の証明図を $\Pi_2$ とします．次の証明図が $\Gamma \to \Delta$ に至る証明図です．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\delta^* \to \delta^*}{\delta^* \to \delta^*, \bot}\,(\to w)}{\to \delta^*, \neg\delta^*}\,(\to\supset) \qquad \begin{matrix}\Pi_1 \\ \neg\delta^*, \Gamma \to \Sigma\end{matrix}}{\Gamma \to \delta^*, \Sigma}\,(\text{cut})}{\Gamma \to \Sigma, \delta^*}\,(\to e) \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \delta^* \to \delta\end{matrix}}{\Gamma \to \Delta}\,(\text{cut})
$$

$1 \Rightarrow 2$:
$\Gamma \to \Delta$ に至る LK の証明図の長さについての帰納法で証明します．

長さが 1 のときは公理のときです．このときは，$\neg\alpha^*, \alpha^* \to \bot$ と $\Delta^*, \bot \to \bot$ が LJ で証明できるので成り立っています．

長さが 2 以上のときは，最後に使われた推論規則によって場合分けします．最後に使われた推論規則が構造に関する推論規則のときは，簡単に証明できます．最後に使われた推論規則

が (→⊃) のときと (⊃→) のときは，命題論理のときと同様です (適当に * を付ければよい).

最後に使われた推論規則が (∀ →) のときは，証明図の最後の部分は次の形です：

$$\frac{[t/x]\alpha,\, \Gamma \to \Theta}{\forall x\alpha,\, \Gamma \to \Theta}\ (\forall \to).$$

帰納法の仮定により，$\neg\Theta^*,\, ([t/x]\alpha)^*,\, \Gamma^* \to \bot$ が LJ で証明可能です．その証明図を $\Pi$ とします．また，

$$(\forall x\alpha)^* \equiv \forall x\neg\neg\alpha^*, \quad ([t/x]\alpha)^* \equiv [t/x]\alpha^*$$

なので，次の証明図が $\neg\Theta^*,\, (\forall x\alpha)^*,\, \Gamma^* \to \bot$ が LJ で証明可能であることを示しています.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi}{\neg\Theta^*,\, [t/x]\alpha^*,\, \Gamma^* \to \bot}}{\neg\Theta^*,\, \Gamma^* \to \neg[t/x]\alpha^*}\ (e\to)(\to\supset) \qquad \bot \to \bot}{\neg\neg[t/x]\alpha^*,\, \neg\Theta^*,\, \Gamma^* \to \bot}\ (\to\supset)}{\neg\Theta^*,\, (\forall x\alpha)^*,\, \Gamma^* \to \bot}\ (\forall \to)(e \to).$$

最後に使われた推論規則が (→ ∀) のときは，証明図の最後の部分は次の形です：

$$\frac{\Gamma \to \Theta,\, \alpha}{\Gamma \to \Theta,\, \forall x\alpha}\ (\to \forall)$$

帰納法の仮定により，$\neg\Theta^*,\, \neg\alpha^*,\, \Gamma^* \to \bot$ が LJ で証明可能です．その証明図を $\Pi$ とします．そのとき，次の証明図が $\neg\Theta^*,\, \neg(\forall x\alpha)^*,\, \Gamma^* \to \bot$ が LJ で証明可能であることを示しています.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi}{\neg\Theta^*,\, \neg\alpha^*,\, \Gamma^* \to \bot}}{\neg\Theta^*,\, \Gamma^* \to \neg\neg\alpha^*}\ (e\to)(\to\supset)}{\neg\Theta^*,\, \Gamma^* \to \forall x\neg\neg\alpha^*}\ (\to\forall) \qquad \bot \to \bot}{\neg\Theta^*,\, \neg(\forall x\alpha)^*,\, \Gamma^* \to \bot}\ (\supset\to)(e \to).$$

□

拡張されたグリベンコの定理を使えば簡単に定理 2.1.22 を証明することができますので，演習問題としておきます.

▶ **問題 2.1.26** *　定理 2.1.22 を証明せよ (ヒント：拡張されたグリベンコの定理は $1 \Rightarrow 2$ の証明に使う).

## 2.2. ゲンツェンの基本定理

述語論理でも，cut なしの証明図と正規な証明図については，命題論理のときと同じ次の 2 つのことが成り立っています.

**ゲンツェン流の体系では，論理式 $\alpha$ に至る cut が使われていない証明図に現れる論理式は $\alpha$ の部分論理式だけである.**

**自然推論 NJ では，論理記号 '⊥' を含まない論理式 $\alpha$ に至る正規な証明図に現れる論理式は $\alpha$ の部分論理式だけである．**

命題論理のときと同様に，NJ の正規化定理を使って LJ の基本定理を証明し，LJ の基本定理と拡張されたグリベンコの定理を使って LK の基本定理を証明します．

> **定理 2.2.1（ゲンツェンの基本定理）** 推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LJ で証明できるならば，$\Gamma \to \Theta$ に至る cut の全く使われていない LJ の証明図がある．このことは LJ を LK に変えても成り立っている．

命題論理では，基本定理を使って古典命題論理が決定可能であることを示しましたが，古典述語論理も直観主義述語論理も決定可能ではありません．決定可能でないことの証明は 3 章の 3.1.11 で行います．

### 2.2.1 体系 LJ の基本定理の証明

命題論理のときと同様に証明できます．自然推論 NJ の最後に使われた推論規則による場合分けに ∀-E と ∀-I の場合が付け加わるだけです．

$\Gamma(\equiv \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ を論理式の列とします．推件式 $\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明可能であるとします．このとき，定理 2.1.20 により $\Gamma \vdash_{NJ} \gamma$ です．よって，変数 $z_1, \cdots, z_n$ と項 $M$ が存在して

$$z_1 : \alpha_1,\ \cdots,\ z_n : \alpha_n \vdash_{NJ} M : \gamma$$

となります．それを示す NJ の推論図が存在します．NJ の正規化定理から，その推論図の正規形が存在します．その正規な推論図の長さに関する帰納法で証明します．

**1.** 推論図の長さが 1 のとき．命題論理のときと全く同様です．

**2.** 推論図の長さが 1 より大のときは 3 つの場合に分かれます．

**2.1.** 最後に使われた推論規則が ⊃-I のとき．命題論理のときと同様です．

**2.2.** 最後に使われた推論規則が ∀-I のとき．推論図は次の形をしています：

$$\cfrac{\begin{matrix}\Pi \\ N : \alpha\end{matrix}}{\mathrm{J}N : \forall z\alpha.}$$

推論図 $\Pi$ の落ちていない仮定の述部を並べたものを $\Gamma_1$ とします．帰納法の仮定を使うと，推件式 $\Gamma_1 \to \alpha$ が LJ で cut なしで証明できます．よって，LJ の推論規則 $(\to \forall)$ により，推件式 $\Gamma_1 \to \forall z\alpha$ が LJ で cut なしで証明できます．列 $\Gamma_1$ に含まれる論理式は列 $\Gamma$ に含まれるので，LJ の推論規則 $(e \to)$, $(c \to)$, $(w \to)$ を何回か使えば推件式 $\Gamma \to \forall z\alpha$ が LJ で cut なしで証明できることが分かります．

**2.3.** 最後に使われた推論規則が消去規則のとき．推論図の結論 $\gamma$ から左に左に辿って行って一番左にある上端の論理式にまで達する経路を**主経路 (main branch)** といいます．推論図が正規であることと最後に使われた推論規則が消去規則であることから，主経路に現れる

論理式 (の出現) は導入規則の結論にはなっていません．なぜならば，もしそのような論理式 (の出現) があったならば，その中で最も下にあるものが極大論理式になってしまうからです．そこで推論図の最も左側の上端部に注目すると，推論図は次の 3 つのどれかの形をしています：

$$\dfrac{x : \alpha \supset \beta \quad \overset{\Pi_1}{N : \alpha}}{\dfrac{xN : \beta}{[xN/y]\Pi}} \;,\qquad \dfrac{x : \bot}{\dfrac{\mathsf{A}x : \beta}{[\mathsf{A}x/y]\Pi}} \;,\qquad \dfrac{x : \forall z\alpha}{\dfrac{\mathsf{F}x : [t/z]\alpha}{[\mathsf{F}x/y]\Pi}} \;.$$

ここで，変数 $x$ は自由な出現であることに注意してください．

前 2 つの場合は命題論理のときと同様です．

3 番目の場合は，推論図 $\Pi$ に帰納法の仮定を適用すると，推件式 $[t/z]\alpha, \Delta \to \gamma$ が LJ で cut なしで証明できます．よって，LJ の推論規則 $(\forall \to)$ により $\forall z\alpha, \Delta \to \gamma$ が LJ で cut なしで証明できます．列 $\Delta$ に現れる論理式はすべて列 $\Gamma$ に現れており，論理式 $\forall z\alpha$ も列 $\Gamma$ に含まれますから，LJ の推論規則 $(e \to)$，$(c \to)$，$(w \to)$ を何回か使えば推件式 $\Gamma \to \gamma$ が LJ で cut なしで証明できることが分かります．

### 2.2.2　体系 LK の基本定理の証明

命題論理では，推件式が cut なしで証明でき前件に $\neg\delta$ が含まれていたら，前件から $\neg\delta$ を取り除き後件に $\delta$ を付け加えて得られる推件式も cut なしで証明できる，という補助定理を使いました．この補助定理は，前件と後件の立場を入れ換えても成立します．また，述語論理でも成り立っています．

**補助定理 2.2.2**

1．列 $\Gamma^-$ を，列 $\Gamma$ から論理式 $\neg\delta$ をすべて取り除いて得られる列とします．そのとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明できるならば，推件式 $\Gamma^- \to \Theta, \delta$ も LK で cut なしで証明できる，
2．列 $\Theta^-$ を，列 $\Theta$ から論理式 $\neg\delta$ をすべて取り除いて得られる列とします．そのとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明できるならば，推件式 $\delta, \Gamma \to \Theta^-$ も LK で cut なしで証明できる，
3．列 $\Theta^-$ を，列 $\Theta$ から論理式 $\bot$ をすべて取り除いて得られる列とします．そのとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明できるならば，推件式 $\Gamma \to \Theta^-$ も LK で cut なしで証明できる．

この補助定理は命題論理のときとほぼ同様に証明できます．

▶ **問題 2.2.3**　補助定理 2.2.2 を証明せよ．

次の補助定理に出てくる $\Gamma^*$, $\Theta^*$ の $*$ は前節の拡張されたグリベンコの定理のところで定

義されたものです.

> **補助定理 2.2.4** 推件式 $\Gamma^* \to \Theta^*$ が LK で cut なしで証明可能ならば, 推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明可能である.

**証明** 推件式 $\Gamma^* \to \Theta^*$ に至る LK の cut なしの証明図の長さに関する帰納法で証明します.

長さが 1 のときは公理のときですが, そのときは明らかに成り立っています.

長さが 2 以上のときは, 最後に使われた推論規則によって場合分けします. 最後に使われた推論規則が構造に関する推論規則のときは簡単に証明できます. ここでは, 最後に使われた推論規則が $(\to\supset)$ と $(\to\forall)$ のときだけに証明を与えます. 他の場合も同様に証明できます.

最後に使われた推論規則が $(\to\supset)$ のときは, 証明図の最後の部分は次の形です:

$$\frac{\alpha^*, \Gamma^* \to \Lambda^*, \beta^*}{\Gamma^* \to \Lambda^*, \alpha^* \supset \beta^*}.$$

帰納法の仮定により, 推件式 $\alpha, \Gamma \to \Lambda, \beta$ が cut なしで LK で証明可能です. そこで推論規則 $(\to\supset)$ を使えば, 推件式 $\Gamma \to \Lambda, \alpha \supset \beta$ が cut なしで LK で証明できます.

最後に使われた推論規則が $(\to\forall)$ のときは, 証明図の最後の部分は次の形です:

$$\frac{\Gamma^* \to \Lambda^*, \neg\neg\alpha^*}{\Gamma^* \to \Lambda^*, (\forall x\alpha)^*}.$$

帰納法の仮定により, 推件式 $\Gamma \to \Lambda, \neg\neg\alpha$ が cut なしで LK で証明可能です. 補助定理 2.2.2 を二度 (最初に 2 を, 次に 1 を) 使えば推件式 $\Gamma \to \Lambda, \alpha$ が cut なしで LK で証明できることが分かります. そこで推論規則 $(\to\forall)$ を使えば, 推件式 $\Gamma \to \Lambda, \forall x\alpha$ が cut なしで LK で証明できます. □

命題論理のときと同様に, $\Gamma \to \Theta$ に対する LK の基本定理の証明は列 $\Theta$ の長さに関する帰納法で証明します.

1. 列 $\Theta$ の長さが 0 のとき. グリベンコの定理より, $\Gamma^* \to \bot$ が LJ で証明可能です. LJ の基本定理により $\Gamma^* \to \bot$ が LJ で cut なしで証明可能です. LJ の証明図は LK の証明図でもあるので, $\Gamma^* \to \bot$ が LK で cut なしで証明可能となります. 補助定理 2.2.4 と補助定理 2.2.2 の 3 を使えば, $\Gamma \to$ が LK で cut なしで証明可能となることが分かります.

2. 列 $\Theta$ の長さが 1 以上のとき. $\Theta \equiv \Delta, \delta$ とします. LK の派生規則 $(\neg\to)$ を使うと推件式 $\neg\delta, \Gamma \to \Delta$ が LK で証明できます. 列 $\Delta$ の長さは列 $\Theta$ の長さより小さいので, 帰納法の仮定により推件式 $\neg\delta, \Gamma \to \Delta$ が LK で cut なしで証明できます. よって, 補助定理 2.2.2 により推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で cut なしで証明できることが分かります.

## 2.3. 古典述語論理の意味論

### 2.3.1　構造と健全性定理

述語論理の意味論は命題論理のそれに比べてかなり複雑です．命題論理の場合には，命題変数の真偽値だけを決めてやればよかったのですが，述語論理の場合は原子論理式を解釈するための**構造 (structure)** を定義しなければなりません．

**定義 2.3.1（構造 (structure)）** 言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{A}$ は次の 3 つのものから構成されています：

1. $\mathcal{A}$ の世界 (universe) とよばれる空でない集合 $|\mathcal{A}|$. $|\mathcal{A}|$ の元を $\mathcal{A}$ の個体 (individual) といいます，
2. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の $n$ 変数関数記号 $f$ に対して，$|\mathcal{A}|$ から $|\mathcal{A}|$ への $n$ 変数関数 $f_{\mathcal{A}}$（とくに，0 変数関数記号 $e$ に対して，$e_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の個体です），
3. 言語 $\mathcal{L}$ の各々の $n$ 変数述語記号 $p$ に対して，$|\mathcal{A}|$ の $n$ 個の直積 $|\mathcal{A}|^n$ の部分集合 $p_{\mathcal{A}}$ ($(c_1, \cdots, c_n) \in p_{\mathcal{A}}$ を $p_{\mathcal{A}}(c_1, \cdots, c_n)$ と書きます).

言語 $\mathcal{L}$ の閉論理式 $\alpha$ が構造 $\mathcal{A}$ で正しい **(valid)** ($\mathcal{A}(\alpha) = \top$ と書きます．正しくないときは，$\mathcal{A}(\alpha) = \bot$ と書きます) という概念を定義します．そのためには，$\mathcal{A}$ の個体を表す定数記号 (すなわち 0 変数関数記号) が必要です．

$\mathcal{A}$ を言語 $\mathcal{L}$ の構造とします．$\mathcal{A}$ の各々の個体 $c$ に対して，言語 $\mathcal{L}$ にはない新しい定数記号 ($c$ の**名前 (name)** とよばれます) を選びます．異なる個体には異なる名前が選ばれているものとします．言語 $\mathcal{L}$ に $\mathcal{A}$ の個体のすべての名前を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ と書きます．個体 $c$ の名前を $\overline{c}$ と書きます．構造 $\mathcal{A}$ の個体の名前のことを単に $\mathcal{A}$ の名前といいます．言語 $\mathcal{L}$ に新しい定数記号 $a$ を付け加えて得られる言語を $\mathcal{L}(a)$ と書きます．

$t$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします．次に $\mathcal{A}$ の個体 $\mathcal{A}(t)$ を帰納的に定義します．

1. $\mathcal{A}(\overline{c}) = c$,
2. $\mathcal{A}(ft_1 \cdots t_n) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \cdots, \mathcal{A}(t_n))$.

$\alpha$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式とします．次に $\alpha$ の真偽値 $\mathcal{A}(\alpha)$ ($\mathcal{A}(\alpha)$ の値は $\top$ か $\bot$ かです) を帰納的に定義します．

**定義 2.3.2**

1. $\mathcal{A}(pt_1 \cdots t_n) = \top \iff p_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(t_1), \cdots, \mathcal{A}(t_n))$,
2. $\mathcal{A}(\bot) = \bot$,
3. $\mathcal{A}(\alpha \supset \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \supset \mathcal{A}(\beta)$,
4. $\mathcal{A}(\forall x \alpha) = \top \iff$ 任意の $\mathcal{A}$ の個体 $c$ に対して $\mathcal{A}([\overline{c}/x]\alpha) = \top$.

$\alpha$ を言語 $\mathcal{L}$ の論理式とします．$\alpha$ に自由に現れる個体変数のすべてを $y_1, \cdots, y_n$ とします．また，$t_1, \cdots, t_n$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします．言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉論理式 $[t_1/y_1]\cdots[t_n/y_n]\alpha$ を $\alpha$ の $\mathcal{A}$-代入例 **(instance)** といいます．$\alpha$ の任意の $\mathcal{A}$-代入例 $\alpha'$ に対して

$$\mathcal{A}(\alpha') = \top$$

のとき，論理式 $\alpha$ は構造 $\mathcal{A}$ で正しい **(valid)** といいます．とくに，$\alpha$ が閉論理式のときは，$\alpha$ が $\mathcal{A}$ で正しいというのは，

$$\mathcal{A}(\alpha) = \top$$

と同じことです．

$\alpha$ を言語 $\mathcal{L}$ の論理式とします．$\mathcal{L}$ の任意の構造 $\mathcal{A}$ で $\alpha$ が正しいとき，$\alpha$ が**恒真 (logically valid)** [3] であるといいます．

公理型 B, C, K, W, L3, N のどれかからメタ変数に論理式を代入して得られる公理 (以後は単に，公理型 B, C, K, W, L3, N から得られる公理といいます) が恒真であることは，命題論理でそれらがトートロジーであることを示したのと同じように証明できます．推論規則 MP が恒真な論理式からは恒真な論理式しか導かないことも，命題論理のときと同様に証明できます．

**▶ 問題 2.3.3**

1. 体系 HK の公理型 F, G から得られる公理は恒真であることを確認せよ．
2. 普遍化規則は恒真な論理式からは恒真な論理式しか導かないことを確認せよ．

上の問題の結果とその前に述べたことより述語論理の健全性定理が得られます．

> **定理 2.3.4（HK の健全性定理）** 論理式 $\alpha$ が体系 HK で証明できるならば，$\alpha$ は恒真である．

健全性定理を使うと，論理式が恒真でないことを示せば論理式が証明できないことを示したことになります．論理式 $\alpha$ が恒真でないのは，ある構造 $\mathcal{A}$ と $\alpha$ の $\mathcal{A}$-代入例 $\alpha'$ が存在して，

$$\mathcal{A}(\alpha') = \bot$$

となっているときです．このような構造 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$-代入例 $\alpha'$ の対 $\langle \mathcal{A}, \alpha' \rangle$ を論理式 $\alpha$ の**反駁 (refutation)** といいます．

**▶ 問題 2.3.5 *** 次の論理式が古典論理の体系 HK で証明できないことを示せ：

1. $\forall x \forall y (px \supset py)$,
2. $\forall x\, rxx \supset \forall x \forall y \forall z (rxy \supset ryz \supset \neg ryx \supset rzy)$,

---

3) 論理的に正しいともいいます．

3. $\forall x \forall y \forall z(rxy \supset ryz \supset rxz) \supset \forall x \exists y\, rxy \supset \exists x\, rxx$,
4. $\forall x \forall y \forall z(rxy \supset ryz \supset rxz) \supset \forall x\, rxx \supset \exists x \forall y\, rxy \supset \exists x \forall y\, ryx \supset \forall x \forall y(\neg rxy \supset ryx)$ ,
5. $\forall x \forall y \forall z(rxy \supset ryz \supset rxz) \supset \forall x \forall y \exists z(rxy \supset (rxz \wedge rzy)) \supset \exists x\, rxx$ .

完全性定理の証明は，命題論理のときと同じく体系 LK に対して行います．しかし，述語論理は決定可能でないので，証明は決定可能性定理とほぼ同様に，というわけには行きません．証明は命題論理のときと比べるとかなり複雑になります．また，推件式の概念を拡張して，論理式の可算無限個の列から構成されていてもよいことにする必要があります．しかし，無限列にはいろいろな型があって複雑なので，列を単に集合と思うことにします．すなわち，これから以後は，2 つの論理式の集合 $\Gamma$ と $\Theta$ に対して $\Gamma \to \Theta$ という表現を推件式ということにします．ただし，$\Gamma$ と $\Theta$ はたかだか可算集合です．

このように定義された推件式での LK の証明は，有限列で構成された推件式のときと同様に考えます．しかし，構造に関する規則のうち縮約と交換の (それぞれ 2 つずつあるので) 4 つは前提と結論が全く同じ推件式になってしまうので必要がありません．また，始式は 2 個の論理式からなり，どの推論規則も増えるにしても有限個の論理式しか増えませんので，証明できる推件式は有限個の論理式からなるものに限られてしまいます．無限個の論理式からなる推件式も証明できるようにするために，左右の割増の規則をいっぺんに無限個の論理式を付け加えてもよいことにします．このように拡張された体系 LK では，次の定理が成り立っていることが，証明図の長さに関する帰納法により容易に証明できます．

**定理 2.3.6**　推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明可能ならば，$\Gamma$ と $\Theta$ のそれぞれの有限部分集合 $\Gamma'$ と $\Theta'$ が存在して $\Gamma' \to \Theta'$ が LK で証明可能である．

次に，「正しい」という概念を推件式に拡張します．$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の閉推件式とします．すべての $\alpha \in \Gamma$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ のときには，ある $\beta \in \Theta$ が存在して $\mathcal{A}(\beta) = \top$ となるとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ は $\mathcal{A}$ で正しいといいます．

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の推件式とします．$\Gamma \to \Theta$ に自由に現れる個体変数のすべてを $y_1, \cdots, y_n, \cdots$ とします．また，$t_1, \cdots, t_n, \cdots$ を言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉項とします．$\Gamma \to \Theta$ の自由変数 $y_1, \cdots, y_n, \cdots$ に $t_1, \cdots, t_n, \cdots$ をそれぞれ代入して得られる言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉推件式を $\Gamma \to \Theta$ の $\mathcal{A}$-代入例 **(instance)** といいます．$\Gamma \to \Theta$ の任意の $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ が $\mathcal{A}$ で正しいとき，推件式 $\Gamma \to \Theta$ は構造 $\mathcal{A}$ で正しいといいます．

$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の推件式とします．$\mathcal{L}$ の任意の構造 $\mathcal{A}$ で $\Gamma \to \Theta$ が正しいとき，$\Gamma \to \Theta$ を**恒真 (logically valid)** であるといいます．これだけ定義すれば，体系 LK の健全性定理を述べることができます．

**定理 2.3.7 (LK の健全性定理)**　推件式 $\Gamma \to \Theta$ が LK で証明できれば，$\Gamma \to \Theta$ は

恒真である．

**証明**　定理2.3.6により，$\Gamma$ と $\Theta$ それれぞれの有限部分集合 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ と $\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ が存在して，推件式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \beta_1, \cdots, \beta_n$ が LK で証明できます．LK の派生規則も使えば，推件式 $\to (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \supset (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n)$ が LK で証明できます．そこで HK と LK の同等性を使うと，論理式 $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \supset (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n)$ が HK で証明可能であることが分かります．HK の健全性定理により $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \supset (\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_n)$ は恒真です．これが恒真となるのは $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ のすべてが真のときは恒(つね)に $\beta_1, \cdots, \beta_n$ のどれかが真となることなので，推件式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \beta_1, \cdots, \beta_n$ が恒真となります．よって，$\Gamma \to \Theta$ は恒真です．□

恒真の定義から，論理式 $\alpha$ が恒真であることと推件式 $\to \alpha$ が恒真であることは同値です．推件式 $\Gamma \to \Theta$ が恒真でないのは，ある構造 $\mathcal{A}$ と $\Gamma \to \Theta$ の $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ が存在して，すべての $\alpha \in \Gamma'$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ で，すべての $\beta \in \Theta'$ について $\mathcal{A}(\beta) = \bot$ となっているときです．このような構造 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma' \to \Theta'$ の対 $\langle \mathcal{A}, \Gamma' \to \Theta' \rangle$ を推件式 $\Gamma \to \Theta$ の反駁 **(refutation)** といいます．

### 2.3.2　完全性定理

証明できない推件式には反駁があるというのが完全性定理です．一般の証明できない推件式については，その反駁をつくるのは大変ですが，次に定義する Hintikka 推件式については，比較的簡単にその反駁があることが分かります．

**定義 2.3.8 (Hintikka 推件式)**　言語 $\mathcal{L}$ の推件式 $\Gamma \to \Theta$ が Hintikka 推件式であるとは，次の 5 つの条件を満たすことである：

1. $\Gamma$ と $\Theta$ の両方に含まれる論理式はない，
2. $\alpha \supset \beta \in \Gamma \implies \alpha \in \Theta$ または $\beta \in \Gamma$,
3. $\alpha \supset \beta \in \Theta \implies \alpha \in \Gamma$ かつ $\beta \in \Theta$,
4. $\forall x\alpha \in \Gamma \implies$ 言語 $\mathcal{L}$ のすべての項 $t$ について $[t/x]\alpha \in \Gamma$,
5. $\forall x\alpha \in \Theta \implies$ 言語 $\mathcal{L}$ の項 $t$ が存在して $[t/x]\alpha \in \Theta$.

**定理 2.3.9**　言語 $\mathcal{L}$ の Hintikka 推件式には反駁がある．

**証明**　言語 $\mathcal{L}$ の Hintikka 推件式を $\Gamma \to \Theta$ とします．言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{A}$ を次のように定義します：

1. $|\mathcal{A}|$ は言語 $\mathcal{L}$ の項全体の集合とします，
2. 各々の $\mathcal{L}$ の $n$ 変数関数記号 $f$ と項 $t_1, \cdots, t_n$ に対して，

$$f_{\mathcal{A}}(t_1, \cdots, t_n) = ft_1 \cdots t_n,$$

3. 各々の $\mathcal{L}$ の $n$ 変数述語記号 $p$ と項 $t_1, \cdots, t_n$ に対して,

$$p_{\mathcal{A}}(t_1, \cdots, t_n) \iff pt_1 \cdots t_n \in \Gamma.$$

個体変数は言語 $\mathcal{L}$ の項なので，$|\mathcal{A}|$ の元です．よって，各々の個体変数に対してその名前が言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の中にあります．推件式 $\Gamma \to \Theta$ から自由に現れる各々の個体変数にその名前を代入して得られる言語 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の閉推件式を $\Gamma' \to \Theta'$ とします．

このとき，$\alpha \in \Gamma'$ ならば $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ で，$\alpha \in \Theta'$ ならば $\mathcal{A}(\alpha) = \bot$ です (*)．このことから $\langle \mathcal{A}, \Gamma' \to \Theta' \rangle$ が $\Gamma \to \Theta$ の反駁であることが分かります．□

▶ **問題 2.3.10**　定理 2.3.9 の証明の中にある (*) を，論理式 $\alpha$ の長さに関する帰納法で示せ．

与えられた LK で証明できない推件式 $\Gamma \to \Theta$ の前件と後件を膨らませて，Hintikka 推件式をつくることを考えます．そのとき問題になるのは，$\forall x \alpha \in \Theta$ のときです．ある項 $t$ をもってきて $[t/x]\alpha$ を後件に付け加えたいのですが，すでにすべての項 $s$ について $[s/x]\alpha \in \Gamma$ となっているときは (Hintikka 推件式の前件と後件とに共通に含まれる論理式があってはいけないので) できません．このようなときには，新しい定数記号 $a$ をもってきて，$[a/x]\alpha$ を後件に付け加えなければなりません．つまり言語も膨らます必要があるのです．

**定理 2.3.11**　$\Gamma \to \Theta$ を言語 $\mathcal{L}$ の LK で証明できない推件式とします．$\mathcal{L}'$ を $\mathcal{L}$ に可算個の新しい定数記号を付け加えて得られる言語とします．そのとき言語 $\mathcal{L}'$ の Hintikka 推件式 $\Delta \to \Lambda$ で $\Gamma \subseteq \Delta$ と $\Theta \subseteq \Lambda$ を満たすものが存在する．

**証明**　次の列を，言語 $\mathcal{L}'$ の論理式で列 $\Gamma, \Theta$ に現れる論理式の部分論理式をすべて並べたものとします．

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$$

また，$\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}'$ をつくるときに加えられた可算個の定数記号も並べられているものとします．言語 $\mathcal{L}'$ の推件式の列 $\Gamma_n^k \to \Theta_n^k$ $(n = 0, 1, 2, \cdots; k = 1, \cdots, n+1)$ と言語 $\mathcal{L}_n^k$ を次のように帰納的に定義します：

1. $\Gamma_0^1 \equiv \Gamma, \Theta_0^1 \equiv \Theta$ かつ $\mathcal{L}_0^1 = \mathcal{L}$,
2. $\alpha_k \equiv \beta \supset \gamma$，推件式 $\Gamma_n^k \to \Theta_n^k, \beta$ が LK で証明できる，$\alpha_k \in \Gamma_n^k$ かつ $k \leq n \Longrightarrow$ $\Gamma_n^{k+1} \equiv \Gamma_n^k, \gamma$,　$\Theta_n^{k+1} \equiv \Theta_n^k$ かつ $\mathcal{L}_n^{k+1} = \mathcal{L}_n^k$,
3. $\alpha_k \equiv \beta \supset \gamma$，推件式 $\Gamma_n^k \to \Theta_n^k, \beta$ が LK で証明できない，$\alpha_k \in \Gamma_n^k$ かつ $k \leq n \Longrightarrow$ $\Gamma_n^{k+1} \equiv \Gamma_n^k$,　$\Theta_n^{k+1} \equiv \Theta_n^k, \beta$ かつ $\mathcal{L}_n^{k+1} = \mathcal{L}_n^k$,
4. $\alpha_k \equiv \beta \supset \gamma, \alpha_k \in \Theta_n^k$ かつ $k \leq n \Longrightarrow \Gamma_n^{k+1} \equiv \Gamma_n^k, \beta$,　$\Theta_n^{k+1} \equiv \Theta_n^k, \gamma$ かつ $\mathcal{L}_n^{k+1}$ $= \mathcal{L}_n^k$,

5. $\alpha_k \equiv \forall x\beta, \alpha_k \in \Gamma_n^k, k \leq n$ かつ $t_1, t_2, \cdots$ はすべての $\mathcal{L}_n^k$ の項を並べたもの $\Longrightarrow$ $\Gamma_n^{k+1} \equiv \Gamma_n^k, [t_1/x]\beta, [t_2/x]\beta, \cdots,\quad \Theta_n^{k+1} \equiv \Theta_n^k$ かつ $\mathcal{L}_n^{k+1} = \mathcal{L}_n^k,$
6. $\alpha_k \equiv \forall x\beta, \alpha_k \in \Theta_n^k, k \leq n$ かつ $a$ を $\mathcal{L}_n^k$ にはない最初の $\mathcal{L}'$ の定数記号 $\Longrightarrow \Gamma_n^{k+1}$ $\equiv \Gamma_n^k,\quad \Theta_n^{k+1} \equiv \Theta_n^k, [a/x]\beta$ かつ $\mathcal{L}_n^{k+1} = \mathcal{L}_n^k(a),$
7. $k \leq n$ かつ上のどれにも該当しない $\Longrightarrow \Gamma_n^{k+1} \equiv \Gamma_n^k,\quad \Theta_n^{k+1} \equiv \Theta_n^k,$ かつ $\mathcal{L}_n^{k+1} = \mathcal{L}_n^k,$
8. $\Gamma_{n+1}^1 \equiv \Gamma_n^{n+1},\quad \Theta_{n+1}^1 \equiv \Theta_n^{n+1}$ かつ $\mathcal{L}_{n+1}^1 = \mathcal{L}_n^{n+1}.$

このとき $\Gamma_n^k \to \Theta_n^k$ が LK で証明できません (*)．また，言語 $\mathcal{L}_n^k$ は言語 $\mathcal{L}$ に有限個の定数記号を付け加えたものになっています．

ここで $\Delta = \bigcup_n \Gamma_n^{n+1}$, $\Lambda = \bigcup_n \Theta_n^{n+1}$ とおきます．$\Delta \to \Lambda$ が言語 $\mathcal{L}'$ の Hintikka 推件式になっています (**)． □

▶ **問題 2. 3. 12**

1. 定理 2.3.11 の証明の中にある (*) を $n$ と $k$ の二重帰納法で証明せよ．
2. 定理 2.3.11 の証明の中にある (**) を証明せよ．

定理 2.3.9 と定理 2.3.11 から，LK で証明できない推件式には反駁があることが分かります．これは完全性定理の対偶なので，完全性定理は証明されました．

> **定理 2. 3. 13（LK の強完全性定理）** 推件式 $\Gamma \to \Theta$ が恒真ならば，$\Gamma \to \Theta$ は体系 LK で証明できる．

「強完全性定理」と先頭に「強」という字が付いているのは，推件式として無限に多くの論理式を含むものを認めているからです．ここでは，たかだか可算個の論理式を含む推件式のみを取り扱いましたが，非可算個の論理式を含む推件式でも強完全性定理は成り立っています．有限個の論理式を含む推件式に制限したものを「(ゲーデルの) **完全性定理**」といいます．もちろん強完全性定理は完全性定理を含んでいます．

**発展 (コンパクト性定理と非標準模型)**

強完全性定理 (上で証明した可算個の論理式を含む推件式に制限した強完全性定理でさえも) からは，いろいろな理論の**非標準模型 (non-standard model)** の存在という面白い結果が得られます．論理式の集合 $\Gamma$ の**模型 (model)** とは，推件式 $\Gamma \to$ の反駁のことです．すなわち，構造 $\mathcal{A}$ と $\Gamma$ の $\mathcal{A}$-代入例 $\Gamma'$ の対で，$\Gamma'$ に含まれるすべての論理式 $\alpha$ について

$$\mathcal{A}(\alpha) = \top$$

となっているものです．$\Gamma$ が閉論理式の集合のときは代入例は関係がないので，$\Gamma$ に含まれるすべての論理式 $\alpha$ について $\mathcal{A}(\alpha) = \top$ となっている構造 $\mathcal{A}$ のことを $\Gamma$ の模型といいま

す．非標準模型とは標準模型でない模型のことです．標準模型とは何かというと，これを一般的に定義することはできませんが，公理的な自然数論には標準模型があります．

非標準模型の存在は強完全性定理から直接証明することも容易ですが，次の**コンパクト性定理 (compactness theorem)** を使ったほうがより本質を捕らえやすくなります．

> **定理 2.3.14（コンパクト性定理）**　論理式の集合の任意の有限部分集合が模型をもてば，もとの集合も模型をもつ．

▶ **問題 2.3.15 ***　定理 2.3.14 を証明せよ．

例として，自然数論の非標準模型の存在を示してみます．まず言語 $\mathcal{L}$ を決めます．言語 $\mathcal{L}$ は 2 つの 2 変数述語記号 $=, <$ と，1 つの 0 変数関数記号 0 と，1 つの 1 変数関数記号 $S$ と，2 つの 2 変数関数記号 $+, \cdot$ をもつ言語とします．構造 $\mathcal{N}$ は次のようなものです：

1. $|\mathcal{N}|$ は自然数全体の集合，
2. $0_{\mathcal{N}}$ は自然数の 0，
3. $S_{\mathcal{N}}$ は 1 を加えるという 1 変数関数，
4. $+_{\mathcal{N}}$ と $\cdot_{\mathcal{N}}$ はそれぞれ自然数上の足算と掛け算である 2 変数関数，
5. $=_{\mathcal{N}}$ と $<_{\mathcal{N}}$ はそれぞれ自然数上の等号関係と大小関係．

構造 $\mathcal{N}$ のことを自然数論の標準模型といいます．言語 $\mathcal{L}$ の構造 $\mathcal{N}$ で正しい閉論理式全体の集合を $\Gamma$ とします．当然のことながら $\mathcal{N}$ は $\Gamma$ の模型ですが，それとは異なる $\Gamma$ の模型があることを示します．言語 $\mathcal{L}$ の項 $\underbrace{SSS\cdots S}_{n\text{個}}0$ を $\overline{n}$ と書くことにします．$\Delta$ を論理式の可算集合 $\{\overline{1} < v_0, \overline{2} < v_0, \overline{3} < v_0, \cdots\}$ とします．また $\Gamma \cup \Delta$ の有限部分集合を $\Theta$ とします．$\Theta$ に含まれる $\overline{n} < v_0$ の形の論理式で最大の $n$ となっているものを $\overline{k} < v_0$ とします．$c$ を $(k+1)_{\mathcal{N}}$ すなわち自然数 $k+1$ の名前とします．対 $\langle \mathcal{N}, [c/v_0]\Theta \rangle$ は $\Theta$ の模型となっています．よって，コンパクト性定理により $\Gamma \cup \Delta$ は模型をもちます．その模型を $\langle \mathcal{N}', [d/v_0](\Gamma \cup \Delta) \rangle$ とします．$|\mathcal{N}'|$ には $|\mathcal{N}|$ にはない元 $d$[4] が存在するので，構造 $\mathcal{N}'$ は $\mathcal{N}$ とは異なった構造になっています．この $\mathcal{N}'$ が自然数論の非標準模型です．$d$ はどの (標準の) 自然数よりも大きい数になっています．

同じようなことが実数論でも行えて，実数論の非標準模型も存在します．その模型の世界の中には無限大元や無限小元があります．無限小元を使って極限の概念などを定義して解析学を展開することができます．そのような解析学が 1960 年代に Abraham Robinson によって創られました．彼はそれを超準解析 (non-standard analysis) と名付けています．詳しいことは[19]を見てください．

---

4)　$d$ は $|\mathcal{N}'|$ の元そのものではなくその名前ではないかと思うかもしれませんが，ものをその名前で指定することは普通のことです．

# 第3章　ラムダ計算の世界

第 1 章では自然推論の推論図の構造を記述するためにラムダ項を導入しましたが，ラムダ項の概念は自然推論とは全く別に考え出されたものです．1930 年代に Church が**ラムダ計算 (lambda calculus)** を考え始めたときは，論理記号を含む体系でした[1)]．しかし，その体系には矛盾があることが分かってしまい，論理記号とそれについての推論規則を取り除き $\beta$-変形だけを残したラムダ計算の体系がその後の主な研究対象となりました．1980 年代に論理記号を含む体系も論理を BCK 論理にすると矛盾が生じないことが発見されましたが，その話題は本書の範囲外です．

$\beta$-変形だけを残したラムダ計算の体系も非常に豊かな世界を提供します．この体系で扱うラムダ項は定数 A, J, F を含みません．定数 A, J, F を含まないのは矛盾が生じるからではなく，関数の計算には必要がないからです．前に述べた矛盾する体系というのは，論理記号 $\supset$, $\forall$ が定数として含まれていて，それについての規則をもった体系です．定数を全く含まないラムダ計算の体系を**純ラムダ計算 (pure $\lambda$-calculus)** といいます．本章で扱うのは純ラムダ計算の体系です．

組み合わせ論理でも $\lambda^*$ を使うとラムダ計算のシミュレーションができますので，組み合わせ論理もラムダ計算と同じ計算能力をもっています．純ラムダ計算に対応する組み合わせ論理は定数として K, S のみを含むものです．そのような組み合わせ論理を**純組み合わせ論理 (pure combinatory logic)** といいます．この章の議論は組み合わせ論理とラムダ計算との両方に通じるように展開することが可能なのですが，注意を集中するためにラムダ計算についてだけ述べることにします．

## 3.1. ラムダ計算の計算能力

### 3.1.1　不動点定理

ラムダ項 $M$ に対して，次のようなラムダ項 $N$ を $M$ の不動点といいます：

$$MN =_\beta N\,.$$

ラムダ計算においては，任意のラムダ項が不動点をもつことが示されます．実は，より強い

1)　集合論のように数学をその中で展開するためのものでした．

結果である次を満たす結合子 Y が存在することが示されます：

$$\mathsf{Y}x =_\beta x(\mathsf{Y}x)\ .$$

このような結合子のことを**不動点結合子 (fixed-point combinator)** といいます．この結果から，どのようなラムダ項 $M$ に対しても $\mathsf{Y}M$ が $M$ の不動点となることが分かります．

> **定理 3.1.1（不動点定理）** $\mathsf{Y} \equiv \lambda x.VV$，ただし $V \equiv \lambda y.x(yy)$ とする．このとき，次が成り立つ：
>
> $$\mathsf{Y}x =_\beta x(\mathsf{Y}x)\ .$$

▶ **問題 3.1.2 ***　不動点定理を証明せよ．

不動点定理に現れる Y は Curry が考えたものですが，次の A.M.Turing による $\mathsf{Y_T}$ も同じ関係を満たしています：

$$\mathsf{Y_T} \equiv ZZ, \quad \text{ただし} \quad Z \equiv \lambda zx.x(zzx)\ .$$

▶ **問題 3.1.3 ***　$\mathsf{Y_T}x \rhd_\beta x(\mathsf{Y_T}x)$ を示せ．

次の系は再帰呼び出しによる関数の計算をラムダ計算で表現するときに使われます．

> **系 3.1.4**　任意のラムダ項 $Z$ に対して，次の $x$ についての方程式は解をもつ：
>
> $$xy_1\cdots y_n = Z \quad (n \geq 0)\ .$$
>
> すなわち，
>
> $$\mathsf{Y}(\lambda xy_1\cdots y_n.Z)y_1\cdots y_n =_\beta [\mathsf{Y}(\lambda xy_1\cdots y_n.Z)/x]Z$$
>
> となっており，$\mathsf{Y}(\lambda xy_1\cdots y_n.Z)$ が方程式の解である．

▶ **問題 3.1.5 ***　系 3.1.4 を確認せよ．

### 3.1.2　計算可能関数のラムダ項による表現

自然数は 0 を含むものとします．自然数から自然数の関数で計算可能関数とは，直観的には無限の記憶容量をもつ計算機で計算を行うプログラムが書ける関数のことです．もちろんプログラムの長さは有限です．計算可能関数の数学的な定義はいくつかあります．原始帰納的関数 (primitive recursive function) から帰納的関数 (recursive function) を定義するやり方，チューリング機械によるもの，E.L.Post の形式的体系によるもの，そしてここで紹介するラムダ計算によるものなどです．これらはすべて同等な定義であることが証明されていま

す．本書ではラムダ計算によるものしか紹介しないので，同等性の証明は行いません．

ラムダ計算で計算可能関数について語るためには自然数をラムダ項で表現する必要があります．その表現方法はいくつか知られており，具体的に表現できるということは重要なことですが，どのように表現するかは本質的なことではありません．ここでは，自然数の具体的な表現法といくつかの基本的な関数の表現法は後で述べることにして，それらが表現できたとして話を進めます．まず，真と偽をラムダ項 ‘$\lambda xy.x$’ と ‘$\lambda xy.y$’ とでそれぞれ表すことにすると，項 $MNR$ が ‘if $M$ then $N$ else $R$’ を表すことになることを指摘しておきます．すなわち，$\top \equiv \lambda xy.x$, $\bot \equiv \lambda xy.y$ とすると

$$\top NR \rhd_\beta N, \quad \bot NR \rhd_\beta R$$

となります．ラムダ項をプログラムらしく書くために

$$(\underline{if}\ \ M\ \ \underline{then}\ \ N\ \ \underline{else}\ \ R) \equiv MNR$$

と定義します．

**定義 3.1.6** 自然数 $n$ $(n \geq 0)$ を表す $\beta$-正規形の閉ラムダ項 (**numeral** とよばれる) を $\overline{n}$ とする．0 か 0 以外の自然数かを判定する述語を表す閉ラムダ項を $\overline{\zeta}$ とする．また，1 を加えるという 1 変数関数を表す閉ラムダ項を $\overline{\sigma}$ とし，1 を引くという 1 変数関数を表す閉ラムダ項を $\overline{\pi}$ とする．すなわち，次の関係を満たしている：

$$\overline{\zeta}\,\overline{0} \rhd_\beta \lambda xy.x, \quad \overline{\zeta}\,\overline{n} \rhd_\beta \lambda xy.y \quad (n \geq 1),$$
$$\overline{\sigma}\,\overline{n} \rhd_\beta \overline{n+1}, \quad \overline{\pi}\,\overline{n} \rhd_\beta \overline{n-1} \quad (n \geq 1).$$

この定義に現れるラムダ項を使うと，(2 変数関数) 和を表すラムダ項 $\overline{add}$ を次のように表すことができます．$x+0=x$ かつ $x+y=(x+(y-1))+1$ なので

$$\overline{add}\,xy =_\beta (\underline{if}\ \ \overline{\zeta}y\ \ \underline{then}\ \ x\ \ \underline{else}\ \ \overline{\sigma}(\overline{add}\,x(\overline{\pi}y)))$$

です．系 3.1.4 によると ($\overline{add}$ についての方程式と考える) 不動点結合子 $\mathsf{Y}$ を使うと

$$\overline{add} \equiv \mathsf{Y}(\lambda zxy.(\underline{if}\ \ \overline{\zeta}y\ \ \underline{then}\ \ x\ \ \underline{else}\ \ \overline{\sigma}(zx(\overline{\pi}y)))) \equiv \mathsf{Y}(\lambda zxy.\overline{\zeta}yx(\overline{\sigma}(zx(\overline{\pi}y))))$$

と表すことができます．

▶ **問題 3.1.7*** 不動点結合子 $\mathsf{Y}$ および定義 3.1.6 に現れるラムダ項とラムダ項 $\overline{add}$ を使って，(2 変数関数) 積を表すラムダ項を表せ．

このように再帰呼び出しを使った関数の定義は強力で，ラムダ項により非常に広い範囲の関数を表現できます．和と積の例はどのような 2 つの自然数を与えても必ず計算できる例ですが，ある自然数に対しては計算が終わらない (正規形をもたない) ものも表すことができます．そのような定義域が自然数全体にならない場合を含む**部分関数 (partial function)** について，関数が**ラムダ定義可能 (λ-definable)** の定義をします．

**定義 3.1.8**　$\phi$ を自然数から自然数への $n$ 変数部分関数とする．ラムダ項 $M$ が $\phi$ を**ラムダ定義する**とは，任意の自然数 $m_1, \cdots, m_n$ に対して，$\phi(m_1, \cdots, m_n)$ が定義されているときは

$$M\overline{m_1}\cdots\overline{m_n} \rhd_\beta \overline{\phi(m_1, \cdots, m_n)}$$

を満たし，$\phi(m_1, \cdots, m_n)$ が定義されていないときは $M\overline{m_1}\cdots\overline{m_n}$ が $\beta$-正規形をもたないことである．$\phi$ をラムダ定義するラムダ項が存在するとき，$\phi$ は**ラムダ定義可能**であるという．

定義域が自然数全体である部分関数を単に関数というのですが，そのことを強調するとき**全域関数 (total function)** といいます．次の定理はラムダ項が関数を計算するアルゴリズムとなっていることを示すのに使います．証明については Barenderegt [1]を見てください．

ラムダ項 $M$ が $\beta$-正規形でないとする．$M$ の中に現れる $\beta$-redex の左側が一番左側にあるとき，その redex を最左 redex という．最左 redex を $\beta$-変形することを**最左変形 (leftmost reduction)** という．

**定理 3.1.9（最左変形定理）**　ラムダ項 $M$ が $\beta$-正規形 $M^*$ をもつとき，最左変形を有限回行うことにより $M$ から $M^*$ を得ることができる．

$n$ 変数全域関数 $\phi$ がラムダ定義可能であるとし，$\phi$ を定義するラムダ項を $M$ とします．$\phi(m_1, \cdots, m_n)$ の値を計算するには，$M\overline{m_1}\cdots\overline{m_n}$ に最左変形を施します．$\phi$ が全域関数なので，上の定理によりその操作は有限回で $\beta$-正規形に到達して終わります．その $\beta$-正規形は $\overline{k}$ の形をしています．この $k$ が $\phi(m_1, \cdots, m_n)$ の値です．全域関数 $\phi$ がラムダ定義可能ならば計算可能であることは，以上によりラムダ項 $M$ が $\phi$ を計算するアルゴリズムと考えることができるので納得できます．逆に，全域関数が計算可能ならばラムダ定義可能でしょうか．これについては，再帰呼び出しを使った関数の定義は十分に強力であることや，計算可能性の他の方法による定義 (たとえば帰納的関数) がラムダ定義可能性による定義と同等であることが示されるので，十分に納得できることです．そこで，自然数から自然数への全域関数がラムダ定義可能であるとき，**計算可能 (computable)** であるとします．また，自然数の集合 $A$ に対して，次のような 1 変数関数 $\phi$ がラムダ定義可能であるとき，集合 $A$ は**帰納的可算 (recursively enumerable)** であるといいます：

$$\phi(m) = \begin{cases} 0 & m \in A \text{ のとき}, \\ \text{undefined} & m \notin A \text{ のとき}. \end{cases}$$

自然数の集合 $A$ とその補集合がともに帰納的可算ならば，集合 $A$ の表現関数は計算可能であることが知られています (証明はやさしくない)．集合 $A$ の表現関数とは次のような関数です：

$$\phi(m) = \begin{cases} 1 & m \in A \text{ のとき}, \\ 0 & m \notin A \text{ のとき}. \end{cases}$$

最後に numeral $\overline{n}$ をどう定義するかを述べます．$\overline{n}$ は次のように帰納的に定義されます：

$$\overline{0} \equiv \lambda x.x, \quad \overline{n+1} \equiv \lambda x.x \bot \overline{n}.$$

定義 3.1.6 に述べられた基本的な関数などは容易に定義できますので，問題としておきます．

▶ **問題 3.1.10 *** ラムダ項 $\overline{\zeta}, \overline{\sigma}, \overline{\pi}$ を定義し，定義 3.1.6 に書かれている性質を満たすことを示せ．

numeral の定義にはいろいろなものがあります．

$$x^0 y \equiv y, \quad x^{n+1} y \equiv x(x^n y), \quad \overline{n} \equiv \lambda xy.x^n y$$

と定義されるものを Church numeral といいます．Church numeral では和，積，べき乗はそれぞれ $\lambda xyzu.xz(yzu)$, $\lambda xyz.x(yz)$, $\lambda xy.yx$ という簡単な形で表されますが，1 を引くという関数の表現が複雑になります．また，2 進数による表現も可能です．その場合，和や積を本書での定義や Church numeral のような 1 進数のときと同様にしたのでは，2 進数にする意味は半減してしまいます．2 進数にしたときは，和と積の定義は我々が筆算を行うときの方法をプログラム化したものをラムダ項で表したものとすれば，1 進数のときよりはるかに速い計算法を与えることができます．

### 3.1.3 決定不可能性定理

与えられたラムダ項が正規形をもつかどうかを判定する決定手続 (アルゴリズム) が存在すると非常に便利です．もし，正規形をもたないと分かれば，無駄に変形を続ける必要がなくなります．まず，次のような閉ラムダ $M$ 項があるかどうか考えてみましょう：

任意の閉ラムダ項 $X$ に対して

$$MX \rhd_\beta \begin{cases} \top & X \text{ が正規形をもつとき}, \\ \bot & \text{その他}. \end{cases}$$

このような閉ラムダ項が存在すれば，ラムダ項が正規形をもつかどうかを判定する決定手続が存在することになります．しかし，そのような閉ラムダ項は存在しません．そのことを以下で示します．

このような閉ラムダ項 $M$ が存在したとします．また，$\omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ とします．$Q \equiv \lambda x.M(xx)\omega\top$ とし $QQ$ を計算すると以下のようになります：

$$QQ \rhd_\beta M(QQ)\omega\top \rhd_\beta \begin{cases} \top\omega\top \rhd_\beta \omega & QQ \text{ が正規形をもつとき}, \\ \bot\omega\top \rhd_\beta \top & \text{その他}. \end{cases}$$

よって $QQ$ が正規形をもつときに $\omega$ に変形できたことになります．Church-Rosser の定理により $\omega$ がその正規形に変形できることになりますが，それは不可能ですので，$QQ$ は正

規形をもたないことになります．しかし，そのときは正規形 T に変形できてしまい，やはり矛盾します．結局，正規形をもつラムダ項を与えると T を返し，正規形をもたないラムダ項を与えると ⊥ を返すようなラムダ項 $M$ の存在が矛盾を導いているので，そのようなラムダ項 $M$ は存在しないことが分かります．

上で述べたようなラムダ項 $M$ が存在しないからといって，ラムダ項が正規形をもつかどうかを判定するアルゴリズムが存在しないとはいい切れません．次に述べるゲーデル数を使わない安易な方法がないというだけに過ぎません．アルゴリズムとは何でしょう．前節では，自然数から自然数への全域関数を計算するアルゴリズムはラムダ項であり，そのようなラムダ項が存在することがアルゴリズムがあること (計算可能) であると規定しました．自然数から自然数への関数でない場合も，問題を自然数から自然数への関数の場合に帰着させます．ラムダ項全体の集合は可算集合ですので，ラムダ項全体の集合から自然数全体の集合への関数 $gd$ が考えられます．この関数 $gd$ は何でもいいわけではなく，次の 2 つの条件を満たしていなくてはいけません．

1．計算可能な 2 変数全域関数 $\tau$ が存在して，任意のラムダ項 $M, N$ に対して次を満たす：

$$\tau(gd(M),\, gd(N)) = gd((MN)).$$

2．計算可能な 1 変数全域関数 $\nu$ が存在して，任意の自然数 $n$ に対して次を満たす：

$$\nu(n) = gd(\overline{n}).$$

ラムダ項 $M$ に対して，$gd(M)$ のことを $M$ のゲーデル数 **(Gödel number)** といいます．またラムダ項をラムダ項 (とくに，numeral) に対応させる関数 $\ulcorner\ \urcorner$ を次のように定義します：

$$\ulcorner M \urcorner \equiv \overline{gd(M)}.$$

問題は次のようになります．

次を満たす 1 変数全域関数 $f$ は計算可能か？：

$$f(gd(M)) = \begin{cases} 0 & M \text{ が正規形をもつとき}, \\ 1 & \text{その他}. \end{cases} \tag{3.1}$$

これから，このような関数 $f$ が計算可能でないことを示します．関数 $f$ が計算可能であるとします．その関数を表すラムダ項を $F$ とすると，次が成り立っています：

$$F\ulcorner M \urcorner \rhd_\beta \begin{cases} \overline{0} & M \text{ が正規形をもつとき}, \\ \overline{1} & \text{その他}. \end{cases}$$

また，計算可能な関数 $\tau$ と $\nu$ を表すラムダ項をそれぞれ T と N とすると次が成り立ちます：

$$\mathsf{T}\ulcorner M \urcorner \ulcorner N \urcorner \rhd_\beta \ulcorner MN \urcorner, \quad \mathsf{N}\ulcorner M \urcorner \ \rhd_\beta \ulcorner\ulcorner M \urcorner\urcorner.$$

$H$ と $J$ を次のように定義します：

$$H \equiv \lambda y.\overline{\zeta}(F(\mathsf{T}y(\mathsf{N}y)))\omega\top, \quad J \equiv H\ulcorner H \urcorner.$$

ラムダ項 $J$ を計算すると以下のようになります：

$$
\begin{aligned}
J &\rhd_\beta \overline{\zeta}(F(\mathsf{T}\ulcorner H\urcorner(\mathsf{N}\ulcorner H\urcorner)))\omega\top \\
&\rhd_\beta \overline{\zeta}(F(\mathsf{T}\ulcorner H\urcorner\ulcorner\ulcorner H\urcorner\urcorner))\omega\top \\
&\rhd_\beta \overline{\zeta}(F\ulcorner H\ulcorner H\urcorner\urcorner)\omega\top \\
&\equiv \overline{\zeta}(F\ulcorner J\urcorner)\omega\top \\
&\rhd_\beta \begin{cases} \overline{\zeta}\overline{0}\omega\top \rhd_\beta \omega & J \text{ が正規形をもつとき}, \\ \overline{\zeta}\overline{1}\omega\top \rhd_\beta \top & \text{その他}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

よって $J$ が正規形をもつときに $\omega$ に変形できたことになります．Church-Rosser の定理により $\omega$ がその正規形に変形できることになりますが，それは不可能ですので，$J$ は正規形をもたないことになります．しかし，そのときは正規形 $\top$ に変形できてしまい，やはり矛盾します．結局，計算可能関数 $f$ を表すラムダ項 $F$ の存在が矛盾を導いているので，(3.1) を満たす関数 $f$ は計算可能ではないということになります．

正規形をもつラムダ項の集合を $\mathcal{N}$ とすると，

$$M \in \mathcal{N} \text{ かつ } M =_\beta N \text{ ならば } N \in \mathcal{N}$$

となっています．一般に，ラムダ項の集合 $\mathcal{A}$ が，

$$M \in \mathcal{A} \text{ かつ } M =_\beta N \text{ ならば } N \in \mathcal{A}$$

を満たすとき $\mathcal{A}$ は $\beta$-equality に関して閉じているといいます．この節のいままでの議論と同様に，次のより一般的な定理が証明できます．

**定理 3.1.11**　空でないラムダ項の集合 $\mathcal{A}$ がラムダ項全体の集合ではなく $\beta$-equality に関して閉じているならば，ラムダ項が集合 $\mathcal{A}$ に入っているかどうかを判定する決定手続は存在しない．

▶ **問題 3.1.12**　定理 3.1.11 を証明せよ．

CL-項の集合 $\mathcal{A}$ が，

$$M \in \mathcal{A} \text{ かつ } M =_w N \text{ ならば } N \in \mathcal{A}$$

を満たすとき $\mathcal{A}$ は weak-equality に関して閉じているといいます．ラムダ項のときと同様な議論により，次の定理が証明できます．

**定理 3.1.13**　空でない CL-項の集合 $\mathcal{A}$ が CL-項全体の集合ではなく weak-equality に関して閉じているならば，CL-項が集合 $\mathcal{A}$ に入っているかどうかを判定する決定手続は存在しない．

▶ **問題 3.1.14** 定理 3.1.13 を証明せよ．

定理 3.1.13 を使うと，古典述語論理の体系が決定不可能であることを示すことができます．述語論理の言語 $\mathcal{L}$ を 2 変数の述語記号 $E$，2 つの定数記号 $k, s$，2 変数の関数記号 $f$ をもつ言語と定めます．言語 $\mathcal{L}$ の以下の 6 つの閉論理式をそれぞれ $\alpha_0, \cdots, \alpha_5$ とします：

1. $\forall v_0 E v_0 v_0$,
2. $\forall v_0 \forall v_1 (E v_0 v_1 \supset E v_1 v_0)$,
3. $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (E v_0 v_1 \supset E v_1 v_2 \supset E v_0 v_2)$,
4. $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 (E v_0 v_1 \supset E v_2 v_3 \supset E(f v_0 v_2)(f v_1 v_3))$,
5. $\forall v_0 \forall v_1 E(f(f k v_0) v_1) v_0$,
6. $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 E(f(f(f s v_0) v_1) v_2)(f(f v_0 v_2)(f v_1 v_2))$.

また，CL-項 $M$ から言語 $\mathcal{L}$ の項 $M^*$ への変換 $^*$ を次のように帰納的に定義します：

1. $u_n^* \equiv v_n \ (n \geq 0)$, $\mathsf{K}^* \equiv k$, $\mathsf{S}^* \equiv s$,
2. $(MN)^* \equiv (f M^* N^*)$.

このとき次が成り立ちます：

$$M =_w \mathsf{K} \iff \text{論理式 } \alpha_0 \supset \alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \alpha_3 \supset \alpha_4 \supset \alpha_5 \supset E M^* k \text{ が古典述語論理で証明できる．} \tag{3.2}$$

よって古典述語論理が決定可能であるとすると，与えられた CL-項 $M$ が $M =_w \mathsf{K}$ かどうかの決定手続きがあることになります．これは定理 3.1.13 に反します．

いまの証明は定理 3.1.13 を使いましたが，定理 3.1.11 を使って証明するにはゲーデル数を用いる必要があり少し複雑になります．また，言語 $\mathcal{L}$ は 2 変数の述語記号と 2 変数の関数記号が含まれていますが，2 変数の述語記号が 1 つ含まれていると決定不可能であることが知られています．1 変数の述語記号しか含まれない体系は決定可能であることも知られています．その決定手続きは[10]に述べられています．

▶ **問題 3.1.15** (3.2) を証明せよ (ヒント：$\Longrightarrow$ は $M =_w \mathsf{K}$ を示す証明図についての帰納法を使う．$\Longleftarrow$ は，$\alpha_0, \cdots, \alpha_5$ を真とし，$EM^*k$ を偽とする模型を構成する)．

## 3.2. ラムダ項の型付けと $\eta$ 変形

### 3.2.1 ラムダ項の型付け

ラムダ項が関数や集合の元を表すとして，どのような関数や集合の元を表しているのかについて素朴な考察をしてみましょう．ラムダ項 $M$ を集合 $\alpha$ から $\beta$ への関数 (このことを $M : \alpha \to \beta$ と書く) と見なし，ラムダ項 $N$ を集合 $\alpha$ の元 (このことを $N : \alpha$ と書く) とすると，ラムダ項 $MN$ は関数 $M$ の $N$ における値なので，$\beta$ の元となります．また，ラムダ項 $M$ を集合 $\beta$ の元とし，$x$ を集合 $\alpha$ の元とすると，ラムダ項 $\lambda x.M$ の $x$ における値が $M$

なので，ラムダ項 $\lambda x.M$ は $\alpha$ から $\beta$ の関数と考えられます．以上の考察を自然演繹風に書いてみると次のようになります：

$$\frac{M:\alpha\to\beta \quad N:\alpha}{MN:\beta}, \qquad \frac{\begin{array}{c}x:\alpha\\ \Pi\\ M:\beta\end{array}}{\lambda x.M:\alpha\to\beta}.$$

これは記号 ‘$\to$’ を記号 ‘$\supset$’ に変えると，ちょうど命題論理の体系 NJ から規則 $\bot$-E を取り除いたものである $\mathrm{NJ}_{\supset}$ になっています．このことを踏まえてラムダ項の型付けの体系 $\mathrm{TA}_{\lambda}$ を定義します．

型を構成するための基本記号は可算個の型変数 ‘$g_0$’, ‘$g_1$’, ‘$g_2$’, $\cdots$ と 1 つの型構成記号 ‘$\to$’ と 2 つの括弧 ‘(’, ‘)’ です．**型 (type)** は次のように帰納的に定義されます．

**定義 3.2.1（型）**

1. 型変数は型である (この形の型を**原子 (atom)** という),
2. $\alpha$ と $\beta$ が型ならば, $(\alpha\to\beta)$ は型である (この形の型を**複合型 (composite type)** という).

$\alpha, \beta$ などのギリシャ文字の小文字を型を表すメタ変数として使用します．また，型変数を表すメタ変数として ‘$a$’, ‘$b$’, ‘$c$’, ‘$d$’, ‘$e$’, ‘$f$’, ‘$a_0$’, ‘$b_0$’, $\cdots$ を用います．括弧の省略の仕方は論理式のときと同じで，足りない括弧は右から補うことにします．

$M$ をラムダ項, $\alpha$ を型とするとき，$M:\alpha$ という表現を**型付け (type-assignment)** といい，$M$ をその式の**主部 (subject)**，$\alpha$ をその式の**述部 (predicate)** といいます．体系 $\mathrm{TA}_{\lambda}$ は体系 $\mathrm{NJ}_{\supset}$ と本質的には同じものです．記号 ‘$\supset$’ の代わりに記号 ‘$\to$’ が使われることや，命題変数 ‘$r_0$’ の代わりに型変数 ‘$g_0$’ が使われますが，このような違いは本質的なものではありません．そのようなわけで体系 $\mathrm{TA}_{\lambda}$ の推論図の定義を書く必要がないのですが，体系 $\mathrm{NJ}_{\supset}$ の復習も兼ねて以下に掲げておきます．

**定義 3.2.2（$\mathrm{TA}_{\lambda}$ の推論図）**

1. 主部が変数の型付けが 1 つ書かれている図形は推論図である．
2. 推論図 $\Pi_1$ の一番下に現れる式が $M:\alpha\to\beta$ で，推論図 $\Pi_2$ の一番下に現れる型付けが $N:\alpha$ のとき，次の図形は推論図である：

$$\frac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{(MN):\beta}.$$

このとき，使われた推論規則は $\to$-E であるといい，推論規則は

$$\frac{M:\alpha\to\beta \quad N:\alpha}{MN:\beta}$$

と書かれる．

3. 推論図 $\Pi$ の中の落ちていない仮定のうちで，主部が変数 $x$ の型付けの述部は $\alpha$ だけとします (主部が変数 $x$ の型付けが現れなくてもよい)．また，$\Pi$ の一番下に現れる型付けが $M:\beta$ であるとします．このとき次の図形は推論図である：

$$\frac{\Pi}{(\lambda x.M):\alpha\to\beta}.$$

このとき，使われた推論規則は →-I であるといい，推論規則は

$$\frac{\begin{array}{c}x:\alpha\\ \Pi\\ M:\beta\end{array}}{\lambda x.M:\alpha\to\beta}$$

と書かれる．この推論規則を使うまでは落ちていなかった仮定 $x:\alpha$ は (複数個あればすべて)，この推論規則を使った結果，落ちた **(discharged)** という．

体系 $TA_\lambda$ は体系 $NJ_\supset$ と同じものなのですが，$NJ_\supset$ では論理式が主役で，$TA_\lambda$ ではラムダ項が主役であると考えられます．このような見方の違いはしばしば入れ替わりますので，以下では型と論理式，型付けと式を混用した記述を用います．たとえば，次の (系 1.3.8 から明らかな) 定理がそのような記述の仕方をしています．また，このように論理式を型とみなすと，直観主義論理の自然推論の体系がラムダ項の型付けの体系に対応し (直観主義論理のヒルベルト流の体系は CL-項の型付けの体系に対応する)，推論図の変形がラムダ項の $\beta$-変形に対応します．このような対応をカリー・ハワードの対応 **(Curry-Howard correspondance)** といいます．

**定理 3.2.3**　$\alpha$ を含意命題論理式 (論理記号としては‘$\supset$’しか現れない論理式) とすると，次の2つは同値である：

1. $\alpha$ が直観主義論理で証明できる，
2. 閉ラムダ項 $M$ が存在して $\vdash_{TA_\lambda} M:\alpha$.

体系 NJ では，論理式 $\alpha$ が与えられたときに $\vdash_{NJ} M:\alpha$ となるラムダ項 $M$ が存在するかどうかが主問題だったのですが，体系 $TA_\lambda$ では，ラムダ項 $M$ が与えられたときに $\vdash_{TA_\lambda} M:\alpha$ となる型 $\alpha$ が存在するかどうかが主問題となります．たとえば，ラムダ項 $\lambda x.x$ については $\vdash_{TA_\lambda} \lambda x.x:a\to a$ ですが，ラムダ項 $\lambda x.xx$ については $\vdash_{TA_\lambda} \lambda x.xx:\alpha$ となる型 $\alpha$ は存在しません．一般に，

$$\vdash_{TA_\lambda} M:\alpha$$

のとき，ラムダ項 $M$ は型 $\alpha$ をもつといいます．ある型 $\alpha$ が存在し，ラムダ項 $M$ が型 $\alpha$

をもつとき，ラムダ項 $M$ は**型付け可能 (typable)** であるといいます[2)]．ラムダ項 $M$ が型 $\alpha$ をもつとき，型付け $M:\alpha$ に至る $TA_\lambda$ の証明図が存在します．NJ の正規化定理 (定理 1.2.47) により $M^*:\alpha$ に至る正規形に変形することができます．このときラムダ項 $M^*$ は $M$ の $\beta$-正規形となっているので，次の定理が得られます．

**定理 3.2.4** 型付け可能なラムダ項は $\beta$-正規形をもつ．

NJ の強正規化定理と同様に，型付け可能なラムダ項はどのように $\beta$-変形しても有限回の変形で $\beta$-正規形に到達するという強正規化定理も成り立っています．

ラムダ項 $\lambda x.x$ は $a\to a$ という型をもちますが，型変数 $a$ に $a\to b$ を代入した結果である $(a\to b)\to a\to b$ という型ももちます．型 $(a\to b)\to a\to b$ は型 $a\to a$ から代入で得られますので，型 $a\to a$ のほうがより一般的な型ということができます．型付け可能なラムダ項が与えられたときに，その最も一般的な型というものがあるでしょうか？　この問題を正確に述べるために代入関係の擬順序について述べます．擬順序の定義から始めます．

**定義 3.2.5（擬順序，最小元，極小元，順序，誘導された順序）** $A$ を集合，$R$ を $A$ 上の 2 項関係とする．次の 2 つの条件を満たしているとき対 $\langle A, R\rangle$ を**擬順序 (pseudo-order)** 集合であるという：

1. 任意の $x\in A$ に対して，$xRx$,
2. 任意の $x, y, z\in A$ に対して，$xRy$ かつ $yRz$ ならば $xRz$.

$\langle A, R\rangle$ を擬順序集合とする．$A$ の元 $a$ に対し，$A$ のどの元 $x$ についても $aRx$ が成り立っているとき，$a$ を $\langle A, R\rangle$ の**最小 (minimam)** 元であるという．また，$A$ の元 $a$ に対し，$A$ のどの元 $x$ についても $xRa$ ならば $aRx$ が成り立っているとき $a$ を $\langle A, R\rangle$ の**極小 (minimal)** 元であるという．擬順序集合 $\langle A, R\rangle$ が次を満たすとき**順序 (order)** 集合であるという：

$$\text{任意の } x, y\in A \text{ に対して } xRy \text{ かつ } yRx \text{ ならば } x=y.$$

擬順序集合 $\langle A, R\rangle$ に対して，$xRy$ かつ $yRx$ が成立するならば

$$x\sim y$$

と定義すると，関係 $\sim$ は $A$ 上の同値関係となる．商集合 $A/\sim$ 上には関係 $R$ から自然に誘導される関係 (それも $R$ と書くことにする) があり，$\langle A/\sim, R\rangle$ は順序集合となる．これを擬順序 $\langle A, R\rangle$ から**誘導された順序 (induced ordered)** 集合という．

---

2)　この定義だと型付け可能なラムダ項は閉なものに限られてしまうが，閉でないラムダ項が型をもつように定義するのが普通である．

$\Gamma$ を型の集合とし，型 $\alpha, \beta$ を $\Gamma$ の元とします．$\beta$ が $\alpha$ から型変数に型を代入して得られるとき

$$\alpha \preceq \beta$$

と書きます．このとき $\langle \Gamma, \preceq \rangle$ は擬順序集合となります．たとえば，

$$a \to b \preceq (b \to c) \to a$$

です．型全体の集合を $Type$ と書くことにします．また，古典論理，直観主義論理，BCK 論理で証明できる型の集合をそれぞれ $HK, HJ, BCK$ と書くことにします．型 $\alpha$ が擬順序集合 $\langle HK, \preceq \rangle$ ($\langle HJ, \preceq \rangle$, $\langle BCK, \preceq \rangle$) の極小元のとき $\alpha$ は古典論理 (それぞれ，直観主義論理，BCK 論理) で極小であるといいます．一般に，型の集合 $\Gamma, \Sigma$ に対して，$\Gamma \subseteq \Sigma$ で $\alpha \in \Gamma$ が $\Sigma$ で極小ならば $\Gamma$ でも極小ですので，次の定理が成り立ちます．

**定理 3.2.6**
1. 直観主義論理で証明可能で，古典論理で極小な型は，直観主義論理で極小である，
2. BCK 論理で証明可能で，直観主義論理で極小な型は，BCK 論理で極小である．

この定理の逆について考察してみましょう．

▶ **問題 3.2.7**　論理式 $((((p \to q) \to p) \to p) \to q) \to q$ が古典論理で極小でないことを示せ．

任意の型 $\alpha$ に対して，擬順序 $\langle \{\beta \mid \beta \preceq \alpha \text{ and } \beta \in Type\}, \preceq \rangle$ から誘導される順序集合は有限集合です．また，直観主義命題論理が決定可能であるので，虱潰し法により論理式 $((((p \to q) \to p) \to p) \to q) \to q$ が直観主義論理で極小であることを示すことができます．その結果，上の定理の 1 については逆が成り立たないことが分かります．2 については，その証明は本書の範囲を超えていますが，次の定理が成立していて，逆が成り立っています．

**定理 3.2.8**　BCK 論理で極小な型は，直観主義論理で極小である．

ラムダ項 $M$ に対して，型の集合 $\{\alpha | \vdash_{TA_\lambda} M : \alpha\}$ を $Type(M)$ と書きます．擬順序集合 $\langle Type(M), \preceq \rangle$ の最小元をラムダ項 $M$ の**主要型 (principal type)** といいます．型付け可能なラムダ項に対して，その主要型は必ず存在するでしょうか？　この問題については次の結果が知られています．証明については [12] を参照してください．

**定理 3.2.9**
1. 型付け可能なラムダ項は主要型を必ずもつ，
2. 与えられたラムダ項が型付け可能かどうか判定し，型付け可能な場合は主要型が求まるような決定手続が存在する．

▶ **問題 3.2.10*** 次の 6 つのラムダ項の主要型を求めよ．ただし，主要型であることの証明はしなくてよい．

$$\lambda xyz.x(yz),\quad \lambda xyz.xzy,\quad \lambda xyz.xy,\quad (\lambda xyz.x(yz))(\lambda xyz.xy),$$
$$\lambda xy.xyy,\quad (\lambda xy.xyy)(\lambda xyz.x(yz)).$$

$M \rhd_{1\beta} N$ でラムダ項 $M$ が型 $\alpha$ をもつとき，ラムダ項 $N$ も型 $\alpha$ をもちます (証明については[12]を参照)．このことから次の定理が得られます．

**定理 3.2.11** $M \rhd_{\beta} N$ ならば $Type(M) \subseteq Type(N)$ である．

擬順序集合 $\langle HJ, \preceq\rangle$ の極小元全体の集合を $HJ_{min}$ とします．$\alpha$ を $HJ_{min}$ の元とすると，$\alpha$ は $HJ$ の元なので $\alpha$ を型にもつラムダ項 $M$ が存在します．また，$\alpha$ が $HJ$ の極小元であることから，ラムダ項 $M$ の主要型であることも容易に分かります．$PT$ を型の集合 $\{\alpha \mid$ あるラムダ項 $M$ が存在して $\alpha$ は $M$ の主要型である $\}$ とすると，

$$HJ_{min} \subsetneq PT \subseteq HJ$$

となっています．$(a\to b)\to a\to b$ は $HJ_{min}$ の元ではありませんが $\lambda xy.xy$ の主要型になっていることから，最初の $HJ_{min} \subsetneq PT$ の部分が分かります．$PT$ は $HJ$ のどのような部分集合になっているかについては，次の驚くべき結果が知られています ([12]を参照)．

**定理 3.2.12** $PT = HJ$ である．すなわち，直観主義論理で証明可能な型はあるラムダ項の主要型になっている．

▶ **問題 3.2.13** 論理式 $(a\to a)\to a\to a$ を主要型としてもつラムダ項を求めよ．

BCK 論理についても同じような議論をするために，まず BCK ラムダ項を定義します．

**定義 3.2.14 (BCK ラムダ項)**

1. 変数は BCK ラムダ項である (この形の項を**原子 (atom)** という)，
2. $M$ と $N$ が BCK ラムダ項で $FV(M)\cap FV(N) = \emptyset$ ならば，$(MN)$ は BCK ラムダ項である (この形の項を**適用 (application)** という)，
3. $M$ が BCK ラムダ項で $x$ が変数ならば，$(\lambda x.M)$ は BCK ラムダ項である (この形の項を**抽象 (abstraction)** という)．

このとき次の定理が成り立ちます．

**定理 3.2.15**　$\alpha$ を含意命題論理式とすると，次の 2 つは同値である：
1. $\alpha$ が BCK 論理で証明できる，
2. 閉 BCK ラムダ項 $M$ が存在して $\vdash_{TA_\lambda} M : \alpha$ .

▶ **問題 3.2.16**　定理 3.2.15 を証明せよ (ヒント：2 から 1 は演繹定理を使うが，その演繹定理は定義 1.2.16 の抽象 $i$ を使ったものになる).

擬順序集合 $BCK$ の極小元全体の集合を $BCK_{min}$ とします．$\alpha$ を $BCK_{min}$ の元とすると，$\alpha$ は $BCK$ の元なので，$\alpha$ を型にもつ BCK ラムダ項 $M$ が存在します．また，$\alpha$ が $BCK$ の極小元であることから，$M$ の主要型であることも容易に分かります．$PT_{BCK}$ を型の集合 $\{\alpha \mid$ ある BCK ラムダ項 $M$ が存在して $\alpha$ は $M$ の主要型である $\}$ とすると，

$$BCK_{min} \subsetneq PT_{BCK} \subsetneq BCK$$

となっています．前出の $\lambda xy.xy$ が BCK ラムダ項なので，最初の $BCK_{min} \subsetneq PT_{BCK}$ の部分が分かります．また，$(a \to a) \to a \to a \notin PT_{BCK}$ から後半の $PT_{BCK} \subsetneq BCK$ が分かります．ただし，$(a \to a) \to a \to a \notin PT_{BCK}$ の証明はやさしくなく，本書の範囲を超えています．

### 3.2.2　$\eta$ 変形と $\beta\eta$ 変形

ラムダ項 $M$ に自由に変数 $x$ が現れないときは，ラムダ項 $\lambda x.Mx$ と $M$ は任意のラムダ項 $N$ に対して

$$(\lambda x.Mx)N =_\beta MN$$

となっています．これは 2 つのラムダ項 $M$ と $\lambda x.Mx$ を関数と見なしたときに全く同じ関数を表しているということです．このことを複雑なラムダ項 $\lambda x.Mx$ からより簡単なラムダ項 $M$ への変形規則としたのが $\eta$-変形です．

まず，$\eta$-変形の体系 $\lambda\eta$ を提示します．$M$ と $N$ をラムダ項とするとき，

$$M \rhd_1 N, \quad M \rhd N$$

という 2 種類の表現が $\lambda\eta$ の式です．体系 $\lambda\eta$ の公理型は次の 2 つです．

$$(\eta) \quad \lambda x.Mx \rhd_1 M \qquad (\text{ただし } x \notin FV(M))$$
$$(\rho) \quad M \rhd N \qquad (\text{ただし } M \equiv_\alpha N)$$

体系 $\lambda\eta$ の推論規則は次の 4 つです．

$$\frac{N \rhd_1 R}{MN \rhd_1 MR}\,(\mu) \qquad \frac{M \rhd_1 N}{MR \rhd_1 NR}\,(\nu) \qquad \frac{M \rhd_1 N}{\lambda x.M \rhd_1 \lambda x.N}\,(\xi)$$

$$\frac{M \rhd_1 N \quad N \rhd R}{M \rhd R}\,(\tau)$$

記法 $\Gamma \vdash_{\lambda\eta} A$ などは以前と同様に定義します．$\vdash_{\lambda\eta} M \rhd_1 N$, $\vdash_{\lambda\eta} M \rhd N$ のとき，それぞれを

$$M \rhd_{1\eta} N, \quad M \rhd_\eta N$$

と書きます．体系 $\lambda\eta$ が定める変形を $\eta$-変形 (**$\eta$-reduction**) といいます．

$M \rhd_{1\eta} N$ となるラムダ項 $N$ が存在しないとき，ラムダ項 $M$ は **$\eta$-正規形** (**$\eta$-normal form**) である，といいます．ラムダ項が $\eta$-正規形であるのは，その中に

$$\lambda x.Mx \quad (x \notin FV(M))$$

という形の部分 (このような部分を **$\eta$-redex** という) をもたないときです．$M \rhd_\eta N$ でラムダ項 $N$ が $\eta$-正規形のとき，$N$ は $M$ の $\eta$-正規形である ($M$ は $\eta$-正規形 $N$ をもつ) といいます．$\eta$-変形によりラムダ項の長さが短くなるので，次の定理が成り立ちます．

**定理 3.2.17** 任意のラムダ項は $\eta$-正規形をもつ．

体系 $\lambda\eta$ についても Church-Rosser の定理 (合流性定理) が成り立っています．証明については[1]を参照してください (注意：[1]で $\lambda\eta$ とよばれている体系は，本書では $\lambda\beta\eta$ とよばれている)．

**定理 3.2.18** (**$\eta$ 変形の Church-Rosser の定理**) $M \rhd_\eta N$ かつ $M \rhd_\eta R$ ならば次のような項 $T$ が存在する：

$$N \rhd_\eta T \quad \text{かつ} \quad R \rhd_\eta T.$$

$\eta$-変形だけの体系はあまり意味がありません．ラムダ計算の重要な変形は $\beta$-変形ですから，意味があるのは両方の変形を含んだ体系 $\lambda\beta\eta$ です．$M$ と $N$ をラムダ項とするとき，

$$M \rhd_1 N, \quad M \rhd N \quad \text{および} \quad M = N$$

という 3 種類の表現が $\lambda\beta\eta$ の式です．体系 $\lambda\beta\eta$ は体系 $\lambda\eta$ に次の 1 つの公理型と 4 つの推論規則を付け加えた体系です：

$$(\beta) \quad (\lambda x.M)N \rhd_1 [N/x]M,$$

$$\frac{M \rhd_1 N}{M \rhd_1 R}\ (\kappa 1) \quad (\text{ただし } R \equiv_\alpha N),$$

$$\frac{M \rhd N}{M = N}\ (\kappa), \qquad \frac{M = N}{N = M}\ (\sigma), \qquad \frac{M = N \quad N = R}{M = R}\ (\tau =).$$

$\vdash_{\lambda\beta\eta} M \rhd_1 N, \vdash_{\lambda\beta\eta} M \rhd N, \vdash_{\lambda\beta\eta} M = N$ のとき，それぞれを

$$M \rhd_{1\beta\eta} N, \quad M \rhd_{\beta\eta} N, \quad M =_{\beta\eta} N$$

と書きます．体系 $\lambda\beta\eta$ が定める変形を $\beta\eta$-**変形** (**$\beta\eta$-reduction**) といいます．$=_{\beta\eta}$ は $\beta\eta$-変形で移りあえる項どうしを等しいと見なした同値関係となります．

式 $M \rhd_{1\beta\eta} N$ となるラムダ項 $N$ が存在しないとき，ラムダ項 $M$ は $\beta\eta$-**正規形** (**$\beta\eta$-normal form**) である，といいます．ラムダ項が $\beta\eta$-正規形であるのは，その中に $\beta$-redex も $\eta$-redex ももたないときです．式 $M \rhd_{\beta\eta} N$ でラムダ項 $N$ が $\beta\eta$-正規形のとき，$N$ は $M$ の $\beta\eta$-正規形である ($M$ は $\beta\eta$-正規形 $N$ をもつ)，といいます．ラムダ項 $M$ が $\beta$-正規形 $M^*$ をもつとき，$M^*$ の $\eta$-正規形が $\beta$-正規形になっていることが容易に分かり，次の定理が得られます．

**定理 3.2.19**　次の 2 つの条件は同値である：

1. ラムダ項 $M$ は $\beta$-正規形をもつ，
2. ラムダ項 $M$ は $\beta\eta$-正規形をもつ．

次の定理は体系 $\lambda\beta$ のときと同様に証明できます．

**定理 3.2.20**　次の 2 つの規則は体系 $\lambda\beta\eta$ の許容規則である：

$$\frac{M \rhd N \quad N \rhd R}{M \rhd R}, \qquad \frac{M \rhd_1 N}{R \rhd_1 N} \quad (\text{ただし } R \equiv_\alpha M).$$

体系 $\lambda\beta\eta$ についても次の Church-Rosser の定理 (合流性定理) が成り立っています．証明については体系 $\lambda\eta$ のときと同じ[1]を参照してください．

**定理 3.2.21** ($\beta\eta$ 変形の Church-Rosser の定理)　$M \rhd_{\beta\eta} N$ かつ $M \rhd_{\beta\eta} R$ ならば，次のような項 $T$ が存在する：

$$N \rhd_{\beta\eta} T \quad \text{かつ} \quad R \rhd_{\beta\eta} T.$$

この定理を使うと，体系 $\lambda\beta$ のときと同様に次の 2 つの系を証明することができます．

**系 3.2.22**　$M =_{\beta\eta} N$ ならば，次のようなラムダ項 $R$ が存在する：

$$M \rhd_{\beta\eta} R \quad \text{かつ} \quad N \rhd_{\beta\eta} R.$$

**系 3.2.23**　ラムダ項 $M$ と $N$ がラムダ項 $R$ の $\beta\eta$-正規形ならば，$M \equiv_\alpha N$ である．

$M \rhd_{1\eta} N$ でラムダ項 $M$ が型 $\alpha$ をもつとき，ラムダ項 $N$ も型 $\alpha$ をもちます (証明につ

いては[12]を参照). このことから次の定理が得られます.

**定理 3.2.24** $M \rhd_{\beta\eta} N$ ならば $Type(M) \subseteq Type(N)$ である.

Church-Rosser の定理により体系 $\lambda\beta\eta$ がつぶれないことが分かります. これから体系 $\lambda\beta$ にその体系からは証明できない式 $\lambda xy.xy = \lambda x.x$ を加えてもつぶれないことが分かります. 一般に, 等号 '=' が言語に含まれるつぶれていない体系で, その体系から証明できないどのような等式をその体系に加えてもつぶれた体系になってしまう ($x = y$ が証明できてしまう) とき, その体系を**等式完備 (equationally complete)** である, といいます. つまり体系 $\lambda\beta$ は等式完備でないということです. 体系 $\lambda\beta\eta$ は等式完備でしょうか? この問題には次の定理を使うと否定的な答えが得られます.

**定理 3.2.25** 体系 $\lambda\beta$ を含む等式完備な体系は, 証明できる式の集合は帰納的可算でない.

体系 $\lambda\beta\eta$ のようにまともな (与えられた図形が証明図かどうか判定できる) 体系は証明できる式の集合が帰納的可算ですので, 体系 $\lambda\beta\eta$ は等式完備でないことが分かります. 具体的には, 等式 $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) = (\lambda x.xxx)(\lambda x.xxx)$ を加えてもつぶれないことが知られています.

▶ **問題 3.2.26** 定理 3.2.25 が正しいことを説明せよ.

体系 $\lambda\beta\eta$ は等式完備ではありませんでしたが, ある望ましい特徴をもっています. その特徴は次の定理の系として得られるのですが, 定理の証明にはラムダ項についての深い分析が必要です. [1]にその証明があります.

**定理 3.2.27** ラムダ項 $M$ と $N$ がどちらも $\beta\eta$-正規形であり, $M \not\equiv_\alpha N$ ならば, 体系 $\lambda\beta$ に等式 $M = N$ を付け加えるとつぶれる.

**系 3.2.28** ラムダ項 $M$ と $N$ がどちらも $\beta$-正規形をもち, $M = N$ が体系 $\lambda\beta\eta$ で証明できないならば, 体系 $\lambda\beta$ に (当然, 体系 $\lambda\beta\eta$ に加えても) 等式 $M = N$ を付け加えるとつぶれる.

▶ **問題 3.2.29** 定理 3.2.27 を使って系 3.2.28 を証明せよ.

# 第4章　非標準論理

論理といえば普通は古典論理のことを指しますが，論理学では古典論理と異なるようなさまざまな論理体系が研究されています．これらの論理は**非標準論理**または**非古典論理**とよばれています．非標準論理の多くは，古典論理からいくつかの公理を取り除いて弱めたり，新しい論理記号を導入し，それについての公理を加えて強めたりすることにより得られたものです．あるものは哲学的な観点から，またあるものは日常に行われる推論の分析や計算機科学における要請からなど，その誕生の経緯はさまざまです．

非標準論理の研究の１つの目標は，このようにして導入された論理の論理的性質を明らかにすることですが，それとともに論理のあるクラスに対してそれに属す論理の論理的性質を一般的に議論することも行われています．そのような俯瞰的視点からの研究は，論理全般に対する包括的な理解をもたらすと考えられるからです．これは，整数や有理数，実数などの数の体系のもつ性質を明らかにする過程で，環や体などの抽象的な代数的構造が導入され，そこから代数学が発展してきたことにたとえられると思います．

この章では，直観主義論理，様相論理，部分構造論理などを中心に非標準論理の研究について述べることにします．とくに最近になって大きく発展してきた非標準論理の代数的研究に焦点をあてています．

## 4.1. 直観主義論理

### 4.1.1　直観主義の立場

直観主義論理についてはすでに１章と２章で触れました．それらの章では，古典論理の論理的性質を示すための補助的な体系として直観主義論理の形式的体系が扱われていました．この節では，まず直観主義論理の哲学的な背景をなす直観主義とよばれる立場についての説明から始め，次に直観主義論理に特徴的な証明論的な性質を述べ，さらに古典論理の場合と比較しながら直観主義論理に対する意味論について説明することにしましょう．

１章で述べたように，19 世紀の末にカントールが創り出した集合論からいろいろなパラドックスが 20 世紀の初めに発見されました．これらのパラドックスを克服する試みのうち，もっとも大胆なものはブラウワーが提唱した直観主義です．直観主義では，数学者が普通認める「数学の対象は人間とは独立した実在であり，数学の研究はそのような実在を支配する法則を発見することである」という考え方の代りに，「数学は人間の行う１つの精神活動であり，数

学の対象は人間の思考によりつくり出されたものである」と考えます．このような直観主義の立場では，「数学的対象 $a$ が性質 $P$ を満たす」という命題が真であると主張するためには，$a$ が $P$ を満たしていることを保証するような構成的な手続きを具体的に与える必要があります．たとえば，古典論理で真である論理式

$$\alpha \vee \neg\alpha \qquad (\text{排中律})$$

は，直観主義では一般には真であるとはいえません．このことを説明するために，$\alpha$ として現時点で正しいかどうかが知られていないような数学的命題を 1 つとってみます (たとえば $\alpha$ としてゴールドバッハの予想，すなわち「2 より大きいすべての偶数は 2 つの素数の和として表される」をとってみます)．このような $\alpha$ に対しては，$\alpha$ も $\neg\alpha$ も証明されていないので，このうちのどちらが正しいかを具体的に指し示すことはできないのです．したがって，直観主義の立場からは $\alpha \vee \neg\alpha$ が真であるとはいえないのです．

この例が示すように，直観主義の立場では $\alpha \vee \beta$ が真であるというためには，$\alpha$ か $\beta$ のどちらかが真であることを具体的に指示し，さらにそれが真であることの具体的な保証 (または証明) を与える必要があります．同様に $\exists x\alpha$ が真であるというためには，具体的に 1 つの項 $t$ を指示し，それとともに $[t/x]\alpha$ が真であることの具体的な保証を与えなければなりません．2 章で述べたように，古典論理では $\exists x\alpha$ は $\neg\forall x\neg\alpha$ の省略形として定義されます．ところが，$\neg\forall x\neg\alpha$ は「すべての $x$ に対して $\neg\alpha$ であると仮定すると矛盾する」ことを表しているだけで，$[t/x]\alpha$ となる項 $t$ を具体的に見つけ出す手段については何も述べていません．したがって，$\exists x\alpha$ と $\neg\forall x\neg\alpha$ は直観主義の立場では異なる内容を表す命題であると考えなければならないのです．

ブラウワーは直観主義の考え方に基づいてすべての数学を再構築しようとしました．しかし直観主義の立場に基づいてつくり出された数学では，これまで得られた数学的成果の多くはその証明が構成的でないために捨て去らざるを得ません．実際，数学の多くの証明では，直観主義では認められない排中律や背理法，そして超限的な方法が使われています．そのためもあって，直観主義的な数学への数学者の関心は限られたものになっています．ブラウワー自身は直観主義を論理として形式化することに対しては批判的でしたが，1920 年代の末になってハイティングは直観主義の論理的な部分の形式化を与えました．このようにして得られた形式体系のことを直観主義論理といいます．

以下では，直観主義という哲学的な立場からは離れ，古典論理と比較しながら (形式的体系としての) 直観主義論理についての性質を議論していくことにします．

### 4.1.2 直観主義論理の体系

古典論理では $\wedge, \vee, \exists$ の論理記号は $\supset, \bot, \forall$ を用いて定義することができますが，4.1.1 でも触れたように，直観主義論理ではそのような形で定義することはできません．したがって直観主義論理を形式化する場合には，あらかじめ $\wedge, \vee, \exists$ を論理記号に入れておく必要があります．2.1 節で導入した言語 $\mathcal{L}$ にこれら 3 つの記号をつけ加えた言語を，以下では $\mathcal{L}^*$ と表すことにします．このような変更により，2.1 節で導入されたいくつかの概念を $\mathcal{L}^*$ の場合に拡

張しておく必要が生じます．まず，論理式の定義は定義 2.1.2 において $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}^*$ で置き換え，さらに次の 2 つを付け加えます．

- $\alpha$ と $\beta$ が言語 $\mathcal{L}^*$ の論理式ならば，$(\alpha \wedge \beta)$ および $(\alpha \vee \beta)$ は言語 $\mathcal{L}^*$ の論理式である．

$$FV((\alpha \wedge \beta)) = FV((\alpha \vee \beta)) = FV(\alpha) \cup FV(\beta).$$

- $\alpha$ が言語 $\mathcal{L}^*$ の論理式で $x$ が個体変数ならば，$\exists x\alpha$ は言語 $\mathcal{L}^*$ の論理式である．

$$FV(\exists x\alpha) = FV(\alpha) - \{x\}.$$

これにより，さらに定義 2.1.3 (狭い意味の部分論理式)，定義 2.1.4 (束縛された出現と自由な出現)，定義 2.1.5 (部分論理式) の変更も必要になりますが，どれも自然な形での変更ですからここでは詳細は述べません．ただし，「束縛された出現」の定義が

> 論理式 $\alpha$ の狭い意味の部分論理式 $\forall x\beta$ または $\exists x\beta$ の中の個体変数 $x$ の出現を，論理式 $\alpha$ の中の束縛された出現という

という形になることを注意しておきます．命題変数および命題定数 '$\bot$' に $\supset, \wedge, \vee$ を繰り返し用いることにより得られる $\mathcal{L}^*$ の論理式のことを，$\mathcal{L}^*$ の命題論理の論理式といいます．

言語 $\mathcal{L}^*$ に対するヒルベルト流の直観主義述語論理の体系 HJ は，2.1 節で導入された HJ，すなわち 2.1.2 の HK から P を取り除いたもの，にさらに $\wedge, \vee, \exists$ に対する次の公理型を付け加えることにより得られます．

C0 : $\alpha \supset \beta \supset (\alpha \wedge \beta)$
C1 : $(\alpha \wedge \beta) \supset \alpha$
C2 : $(\alpha \wedge \beta) \supset \beta$
D0 : $(\alpha \supset \gamma) \supset (\beta \supset \gamma) \supset (\alpha \vee \beta) \supset \gamma$
D1 : $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$
D2 : $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$
H : $[t/x]\alpha \supset \exists x\alpha$
I : $\forall x(\beta \supset \alpha) \supset \exists x\beta \supset \alpha$　($\alpha$には変数 $x$ が自由には現れない)

以下では，HJ といえば，このように拡張された体系を指すものとします．また命題論理の体系 HJ というのは，論理式をすべて命題論理の論理式に制限し，さらに HJ から '$\forall$' と '$\exists$' に関する公理型 F, G, H, I と普遍化規則を除いた体系のこととします．

▶ **問題 4.1.1**　このように拡張された HJ においても演繹定理が成り立つことを確かめよ．

言語 $\mathcal{L}^*$ に対する自然推論は 2.1.4 の NJ を拡張することにより導入できます．そのように拡張された NJ に対しても正規化定理を示すことができますが，ここではその詳しい内容には立ち入りません．また，言語 $\mathcal{L}^*$ に対するゲンツェン流の体系 LJ は，2.1.7 で導入された LJ にさらに '$\wedge$', '$\vee$', '$\exists$' に関する次の推論規則を付け加えることにより得られます．

∧ に関する規則

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \gamma}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \gamma}\ (\wedge \to 1) \qquad \frac{\beta, \Gamma \to \gamma}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \to \gamma}\ (\wedge \to 2)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \wedge \beta}\ (\to \wedge)$$

∨ に関する規則

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \gamma \quad \beta, \Gamma \to \gamma}{\alpha \vee \beta, \Gamma \to \gamma}\ (\vee \to)$$

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Gamma \to \alpha \vee \beta}\ (\to \vee 1) \qquad \frac{\Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha \vee \beta}\ (\to \vee 2)$$

∃ に関する規則

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \gamma}{\exists x\alpha, \Gamma \to \gamma}\ (\exists \to) \qquad \frac{\Gamma \to [t/x]\alpha}{\Gamma \to \exists x\alpha}\ (\to \exists)$$

ただし，$(\exists \to)$ において変数 $x$ は下式には自由に現れないものとします．このように拡張した LJ と HJ についても，定理 2.1.20 を証明することができます．

**定理 4.1.2** $\Gamma$ を $\mathcal{L}^*$ の論理式の列，$\gamma$ を $\mathcal{L}^*$ の論理式とする．このとき，$\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明可能であるとき，またそのときに限り

$$\Gamma \vdash_{HJ} \gamma$$

が成り立つ．

▶ **問題 4.1.3** 次の推件式が LJ で証明可能であることを示せ (2.1.2 節を参照せよ)：

1. $\alpha \wedge \beta \to \neg(\alpha \supset \neg\beta)$,
2. $\alpha \vee \beta \to (\alpha \supset \beta) \supset \beta$,
3. $\exists x\alpha \to \neg\forall x\neg\alpha$,
4. $\alpha \to \neg\neg\alpha$,
5. $\neg\alpha \wedge \neg\beta \to \neg(\alpha \vee \beta)$,
6. $\alpha \vee \neg\alpha \to \neg\neg\alpha \supset \alpha$.

以下では，LJ といえば，上で導入した言語 $\mathcal{L}^*$ に拡張された体系 LJ を指すことにします．また，論理式を命題論理の論理式に制限し，論理記号に関する推論規則のうちから ∀ および ∃ に関する規則を LJ から除いた体系のことを，命題論理の体系 LJ とよぶことにします．このとき，$\mathcal{L}^*$ に拡張された LJ についても基本定理を示すことができます (定理 2.2.1 を参照)．命題論理 LJ の基本定理から次の結果を導くことができますが，その証明はここでは触れません．

**定理 4.1.4**　ゲンツェン流の命題論理の体系 LJ は決定可能である．

▶ **問題 4.1.5**　$p, q$ を異なる命題変数とする．このとき次の推件式はともに cut なしの LJ の証明図をもたないことを確かめよ (したがってこの 2 つの推件式は LJ で証明可能でない．2.1.2 の古典論理の場合と比較してみよ)．

1. $\neg(p \supset \neg q) \to p \wedge q$,
2. $(p \supset q) \supset q \to p \vee q$.

LK における派生規則についての結果 (1.2.6 および 2.1.7 を参照のこと) を使えば，$\mathcal{L}^*$ の論理式からなる推件式は，もしそれが LJ で証明可能ならば LK でも証明可能であることが導かれます．しかし問題 4.1.5 に示されるように，この逆は一般には成り立ちません．つまり，LK は LJ より真に強い体系になっています．

古典論理と直観主義論理の証明可能性の間の関係は，定理 1.2.58 および定理 2.1.22 で述べたグリベンコの定理により明らかにされています．命題論理の場合は，グリベンコの定理は $\mathcal{L}^*$ の論理式まで拡張することができます．そのことを示すために，まず LK を言語 $\mathcal{L}^*$ の論理式に対して拡張します．すなわち，$\wedge, \vee, \exists$ は省略記号としてではなく論理記号として最初から与えておきます．さらにこれらの記号に対する推論規則としては 1.2.7 で述べた派生規則をとります．このように $\mathcal{L}^*$ に対して拡張された体系 LK に対しても基本定理を証明することができます．

**定理 4.1.6** (**$\mathcal{L}^*$ に対するグリベンコの定理**)　$\Gamma, \Delta$ をともに $\mathcal{L}^*$ の命題論理の論理式の列とする．このとき次の 2 つの条件は同値である：

1. $\Gamma \to \Delta$ が LK で証明可能である，
2. $\neg\Delta, \Gamma \to \bot$ が LJ で証明可能である．

▶ **問題 4.1.7**　定理 4.1.6 を証明せよ．

### 4.1.3　論理和と存在命題

4.1.2 で触れたように，直観主義の立場では論理和 $\alpha \vee \beta$ が真であることを示すためには，$\alpha$ と $\beta$ のどちらかが真であることを具体的に指示し，さらにそれが真であることの証明を与える必要があります．同様に，存在命題 $\exists x \alpha$ が真であることを示すためには，項 $t$ を具体的に与え，その $t$ に対して $[t/x]\alpha$ が真になることの証明を与えることが必要です．以下の定理 4.1.8 と定理 4.1.11 は，これら直観主義に特徴的な性質が直観主義論理の体系にどのように反映されているかを明らかにしています．この 2 つの定理は，以下で示すように，ともに LJ の基本定理から導かれます．

**定理 4.1.8（直観主義論理の論理和分離性 (disjunction property)）** 論理式 $\alpha \vee \beta$ が LJ で証明可能ならば，$\alpha$ か $\beta$ のどちらかが LJ で証明可能である．

古典論理の場合，たとえば命題変数 $p$ に対し $p \vee \neg p$ は証明可能ですが，$p$ も $\neg p$ も証明可能ではありません．したがって古典論理は論理和分離性をもちません．LJ の基本定理と 1.3.1 で述べたことから，次のことが証明できることを注意しておきましょう．実際，cut なしの証明図がこのような性質をもっています．

**定理 4.1.9** 推件式 $\Gamma \to \gamma$ が LJ で証明可能ならば，$\Gamma \to \gamma$ に至る証明図のうちに，その中に現われる論理式がすべて $\Gamma, \gamma$ の中の論理式の部分論理式だけからなるものがある．

この定理における部分論理式とは，言語 $\mathcal{L}^*$ での部分論理式のことです．この結果から，ただちに次の結果が導かれます．

**系 4.1.10** 論理式 $\perp$ は LJ で証明可能ではない．

**証明** そうでないとすると，推件式 $\to \perp$ に至る証明図が存在するはずですから，とくに cut なしの証明図が存在します．その証明図に現われる公理型は $\alpha \to \alpha$ または $\perp \to \beta$ の形ですが，定理 4.1.9 よりこれらの $\alpha$ や $\beta$ は証明図の終式である $\to \perp$ に部分論理式として現れるはずです．つまり $\alpha$ や $\beta$ は $\perp$ でなければなりません．さらに終式は論理記号を含んでいません．したがって $\to \perp$ は $\perp \to \perp$ の形の公理型に (cut 以外の) 構造に関する推論規則だけを使って証明されることになります．しかし，明らかにこれは不可能です． □

これらの 2 つの結果，つまり定理 4.1.9 と系 4.1.10 は LK に対しても成り立っています．さて，定理 4.1.8 は次のようにして証明できます．

**定理 4.1.8 の証明** $\alpha \vee \beta$ が LJ で証明可能ならば，LJ の基本定理より $\alpha \vee \beta$ に至る証明図で cut が全く使われていないものが存在します．明らかに $\to \alpha \vee \beta$ は公理の形をしていないので，この証明図では少なくとも 1 回は推論規則が使われていることが分かります．そこでこの証明図の中で最後に使われた (すなわち，一番下にある) 推論規則を $I$ とします．容易に分かるように，$I$ としては ($\to \vee 1$) と ($\to \vee 2$) 以外にはありえません．ところが前者であれば $I$ の上式は $\to \alpha$，後者であれば $I$ の上式は $\to \beta$ となるので，定理が示されます． □

定理 4.1.8 と同様な論法を使うことにより次の結果が得られます．

**定理 4.1.11（直観主義論理の存在具体性（existence property））** 論理式 $\exists x\alpha$ が LJ で証明可能ならば，ある項 $t$ に対し $[t/x]\alpha$ が LJ で証明可能である．

この定理 4.1.11 も LK に対しては成り立ちません．$\mathcal{L}^*$ が関数記号を 1 つも含まない場合，$q$ を 1 変数の述語記号とすると，$\exists x(qx \supset \forall yqy)$ は LK で証明可能です．他方，$\mathcal{L}^*$ のどんな項 $z$ をとっても，$qz \supset \forall yqy$ が LK で証明可能でないことを示すことができます ($\mathcal{L}^*$ が関数記号を 1 つも含まないという仮定のもとでは，すべて項は個体変数であることに注意してください)．

▶ **問題 4.1.12**

1. $p \vee \neg p$ および $\exists x(qx \supset \forall yqy)$ のそれぞれに至る LK の cut なしの証明図を与えよ．
2. 1 の証明図を観察し，LJ に対する定理 4.1.8 や 4.1.11 の証明にならって LK の場合にそれらの証明を試みると，どこでその議論が破綻するか．
3. $qz \supset \forall yqy$ は恒真とはならないことを示せ (2.3 節参照)．

### 4.1.4　クリプキによる直観主義命題論理の意味論

1.4 節では古典命題論理に対する意味論としてトートロジーの概念を導入し，古典命題論理の体系 HK および LK に対する健全性と完全性を証明しました．さらに 2.3 節ではその意味論を述語論理に拡張し，同様な結果が述語論理に対しても得られることを示しています．この節ではクリプキ (Kripke) が導入した直観主義論理の意味論を紹介します．クリプキは述語論理に対してもその意味論を展開していますが，以下では命題論理の場合についてのみ述べることにします．

空でない任意の順序集合 $\langle S, \leq\rangle$ のことを**クリプキ構造 (Kripke frame)** とよびます．いま $S$ の部分集合 $U$ が**遺伝的 (hereditary)** であるとは，すべての $x, y \in S$ に対し

$$x \in U \ \text{で}\ x \leq y \ \text{であるならば}\ y \in U$$

が成り立つこととします．クリプキ構造 $\langle S, \leq\rangle$ 上の**付値**とは，命題変数全体の集合から $S$ の遺伝的部分集合全体の集合への写像のこととします．それぞれの付値 $h$ に対し，さらに

$$h(\bot) = \emptyset$$

と定めておきます．クリプキ構造 $\langle S, \leq\rangle$ 上の付値 $h$ が与えられたとき，$S$ の要素と論理式の関係 $\models$ を次の 1 から 4 により帰納的に定義します．ただし，$a, b$ は $S$ の要素です．

1. $\alpha$ が命題変数または $\bot$ のとき，$a \models \alpha \Leftrightarrow a \in h(\alpha)$,
2. $a \models \alpha \supset \beta \Leftrightarrow b \geq a$ であるようなすべての $b$ に対し，$b \models \alpha$ ならば $b \models \beta$,
3. $a \models \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow a \models \alpha$ かつ $a \models \beta$,
4. $a \models \alpha \vee \beta \Leftrightarrow a \models \alpha$ または $a \models \beta$.

関係 $\models$ は，定義から明らかなように，$h$ から一意的に定まります．そこでこれからはこの関

係 $\models$ を付値 $h$ と同一視して，関係 $\models$ のことも付値とよぶことにします．クリプキ構造 $\langle S, \leq\rangle$ とその付値 $\models$ からなる三つ組 $\langle S, \leq, \models\rangle$ のことを**クリプキ・モデル (Kripke model)** といいます．

クリプキ・モデルは直観的には次のように捉えると理解しやすいかと思います．集合 $S$ のそれぞれ要素は１つの「**可能な世界 (possible world)**」を表すと考えます．つまり，$S$ は対象とする可能な世界の全体です．$a$ を可能な世界，$\alpha$ を論理式とするとき，

$$a \models \alpha$$

は「世界 $a$ で $\alpha$ が真である」ことを表します．また，２つの世界 $a$ と $b$ の間に

$$a \leq b$$

が成り立つのは，世界 $a$ からは $b$ が「見えている (**到達可能 (accessible)** である)」ことであると考えます．クリプキ・モデルについての要請から，到達可能関係は順序としての性質をもたなければなりません．上の３と４にしたがうと，１つの世界での「かつ」と「または」は古典論理の場合と同じように理解されますが，「ならば」の場合 $\alpha \supset \beta$ の真偽は，その世界だけでなく，その世界から到達可能なすべての世界での $\alpha$ と $\beta$ の真偽が関係してくることになります．また次の問題で示されるように，論理式が真であるという性質は到達可能関係により保たれるのです．

▶ **問題 4. 1. 13** $\langle S, \leq, \models\rangle$ はクリプキ・モデルとする．任意の論理式 $\alpha$ に対し，集合 $\{x \mid x \models \alpha\}$ は遺伝的であることを示せ．

クリプキ・モデル $\langle S, \leq, \models\rangle$ において，$S$ のすべての要素 $a$ に対し

$$a \models \alpha$$

となるとき，論理式 $\alpha$ は $\langle S, \leq, \models\rangle$ で**真**であるといいます．そうでないとき，$\alpha$ は $\langle S, \leq, \models\rangle$ で**偽**であるといいます．クリプキ構造 $\langle S, \leq\rangle$ 上のどのような付値 $\models$ に対しても $\alpha$ が $\langle S, \leq, \models\rangle$ で真になるとき，$\alpha$ は $\langle S, \leq\rangle$ で**恒真**であるといいます．いま，特別なクリプキ構造として $S$ が１点 $c$ のみからなる集合である場合について考えてみましょう．この場合 $S(=\{c\})$ ですから，その遺伝的部分集合は $\{c\}$ と $\emptyset$ の２つのみです．そこで，このような特別なクリプキ構造上の付値 $\models$ に対し，1.4 節の意味での (古典命題論理における) 付値 $f$ を

$$f(p) = \top \quad \Leftrightarrow \quad c \models p \qquad (p \text{ は命題変数}) \tag{4.1}$$

として定めます．すると，任意の論理式 $\alpha$ に対し

$$f(\alpha) = \top \quad \Leftrightarrow \quad c \models \alpha \tag{4.2}$$

となることを，論理式の構成に関する帰納法を使って示すことができます．こんどは逆に古典命題論理の付値 $f$ が与えられたとき，クリプキ構造 $\langle\{c\}, \leq\rangle$ 上の付値 $\models$ を (4.1) が成り立つように定めることができます．すなわち，古典命題論理の付値とクリプキ構造 $\langle\{c\}, \leq\rangle$ 上の付値との間に一対一の対応があることが分かります．以上のことから，$S$ がとくに１点か

らなる集合の場合には，論理式 $\alpha$ が $\langle S, \leq \rangle$ で恒真であることと $\alpha$ がトートロジーであることとは同値になります．このようにクリプキ構造は古典命題論理の意味論を自然な形で拡張したものと見ることができるのです．

**定理 4.1.14（HJ の健全性と完全性）**　任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が体系 HJ で証明可能であるための必要十分条件は，$\alpha$ が任意のクリプキ構造で恒真となることである．

**証明**　完全性の証明はここでは省略します．健全性を示すためには，

(1)　HJ のそれぞれの公理型に対し，そのどんな代入例も任意のクリプキ構造で恒真になること，

および

(2)　推論規則 MP は恒真な論理式から恒真な論理式を導く

ということを示しておけば，あとは与えられた証明可能な論理式 $\alpha$ の推論図の長さに関する帰納法を使って $\alpha$ が恒真であることが導かれます．そこで 1 つの例として，公理 $\alpha \supset \beta \supset (\alpha \wedge \beta)$ が恒真になることの証明を以下に与えておきます．いま $\langle S, \leq \rangle$ をクリプキ構造，$a$ を $S$ の任意の要素とし，

$$a \models \alpha \supset \beta \supset (\alpha \wedge \beta)$$

となることを示します．そのために $a \leq b$ となる $b (\in S)$ および $b \leq c$ となる $c (\in S)$ を任意にとり，さらに $b \models \alpha$ かつ $c \models \beta$ であると仮定します．このとき $b \models \alpha$ と $b \leq c$ とから $c \models \alpha$ が成り立つ (問題 1.1.12 を参照) ので，$c \models \alpha \wedge \beta$ となります．したがって，$b \leq c$ となる任意の $c$ に対し $c \models \beta$ ならば $c \models \alpha \wedge \beta$ が成り立つので，$b \models \beta \supset (\alpha \wedge \beta)$．$a \leq b$ となる任意の $b$ に対し $b \models \alpha$ ならば $b \models \beta \supset (\alpha \wedge \beta)$ となるので，$a \models \alpha \supset \beta \supset (\alpha \wedge \beta)$ が得られます．□

クリプキ構造 $\langle S, \leq \rangle$ において $S$ が有限集合であるとき，$\langle S, \leq \rangle$ を**有限クリプキ構造**といいます．定理 4.1.14 の完全性の証明には，論理式 $\alpha$ が HJ で証明可能でなければ $\alpha$ を偽にするようなクリプキ・モデルが存在することを示す必要がありますが，この証明をさらに精密化することにより次の結果が得られます．

**定理 4.1.15（直観主義命題論理の有限モデル特性（finite model property））**　任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が体系 HJ で証明可能であるための必要十分条件は，$\alpha$ が任意の有限クリプキ構造で恒真となることである．したがって，論理式 $\alpha$ が直観主義命題論理で証明可能でないときは，$\alpha$ を偽にするような有限クリプキ・モデルが存在する．

▶ **問題 4.1.16**　次の論理式はどれも古典論理で証明できるが，直観主義論理では証明できない．このことを確かめるために，まずこれらすべての論理式がトートロジーであることを示し，次にそれぞれの論理式に対しそれを偽にするような有限クリプキ・モデルを与えよ．

1. $p \vee \neg p$,
2, $(p \supset q) \vee (q \supset p)$,
3. $\neg p \vee \neg\neg p$,
4. $(p \supset q) \supset (\neg p \vee q)$.

### 4.1.5　中間論理

古典論理は直観主義論理より真に強い論理ですが，それでは直観主義論理と古典論理の間にはどのような論理がどれだけ存在するのでしょうか．またそのような論理は直観主義論理や古典論理とどれだけ共通な性質をもつのでしょうか．このような問いに答えるためには，まず論理というものの一般的な定義を与える必要があります．

1つの自然な考え方は，(直観主義論理を強めた論理の場合であれば)「いくつかの公理型を付け加えて得られるような HJ の拡張体系」のことを論理と定義することでしょう．この場合，付け加える公理型は必ずしも有限に限らず無限であってもよいものとします．このようにして得られる体系が古典論理に含まれるためには，新たに付け加える公理型のどの代入例も古典論理で証明可能でなければならないという条件が必要になります．これらの要請を満たす論理を**中間論理 (intermediate logic)** とよびます (正確には，直観主義論理と古典論理の中間にある論理とよぶべきでしょうが，伝統的にこれらの論理は中間論理とよばれています)．

以上の定義は直観的には分かりやすいかもしれませんが，より扱いやすくするためにその定義を述べ直すことにします．命題論理の論理式 $\alpha$ に現れるいくつかの命題変数 $p_1, \cdots, p_m$ について，それらが現れるすべての個所をそれぞれ論理式 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ で置き換えることにより論理式 $\alpha^*$ が得られるとき，$\alpha^*$ は $\alpha$ から代入により得られる (または $\alpha^*$ は $\alpha$ の代入例) といいます．たとえば ($p$ と $q$ が異なるとして)，$(r \supset q) \supset ((r \supset q) \wedge q)$ は $p \supset (p \wedge q)$ の代入例ですが，$p \supset ((r \supset q) \wedge q)$ はそうではありません．

▶ **問題 4.1.17**　HJ に公理型 $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ を付け加えて得られる命題論理の体系を L とする．いま $\alpha$ が L で証明可能ならば，$\alpha$ から代入により得られる論理式も L で証明可能になることを示せ．

問題 4.1.17 が述べているのは，HJ にいくつかの公理型を付け加えた中間命題論理の体系 L で証明可能な論理式全体の集合を $\widetilde{\mathrm{L}}$ とすると，$\widetilde{\mathrm{L}}$ は代入に関して閉じているということです．もちろん $\widetilde{\mathrm{L}}$ は MP に関しても閉じています．すなわち，$\alpha$ と $\alpha \supset \beta$ がともに $\widetilde{\mathrm{L}}$ に属するならば $\beta$ も $\widetilde{\mathrm{L}}$ に属します．さて，ここで「論理式の集合 $\widetilde{\mathrm{L}}$ と論理体系 L を同一視する」ことにより中間命題論理を次のような形で定義し直しておきます．

**定義 4.1.18 (中間命題論理)** 言語 $\mathcal{L}^*$ の (命題論理の) 論理式の集合Lが次の3つの条件を満たすとき，Lを中間命題論理という：

1. HJ の公理型のすべての代入例はLに属す，
2. Lに属しているすべての論理式は HK で証明可能である，
3. Lは MP と代入に関して閉じている[1].

中間命題論理の条件のうち2を除いたものを**超直観主義 (superintuitionistic) 命題論理**といいます．超直観主義命題論理のうち中間命題論理でないものはただ1つです．それは $\mathcal{L}^*$ の論理式全体の集合です．この集合には命題変数 $p$ もその否定 $\neg p$ も含まれますから，この論理は「矛盾」しています．超直観主義命題論理のそれぞれは論理式の集合ですから，超直観主義命題論理の全体は集合の包含関係により順序づけられますが，その中で直観主義論理は最小な論理であり，古典論理は「無矛盾な」論理のうち (すなわち中間命題論理のうち) 最大なものになります．また $\{\mathrm{L}_i \,|\, i \in I\}$ を中間命題論理の集まり (無限の集まりでもよい) とすると，それらの共通部分 $\bigcap_{i \in I} \mathrm{L}_i$ も定義 3.1.17 の3つの条件を満たしますから中間命題論理になります．そのことから中間命題論理全体は完備束 (complete lattice) とよばれる構造をもつことが分かります．ただし完備束の定義は次の節を見てください．他方，中間命題論理の (論理式の集合としての) 和集合は必ずしも中間命題論理にならないことを注意しておきます．中間命題論理については多くの興味深い結果が得られています．以下にいくつかの基本的な結果をあげておきます．

1章で古典論理や直観主義論理の演繹定理を論じました．HJ の場合，論理式の集合 $\Gamma$ と論理式 $\alpha$ に対し $\Gamma$ に属する論理式を仮定とするような $\alpha$ に至る HJ の推論図が存在することを $\Gamma \vdash_{HJ} \alpha$ と表しました．このとき HJ の演繹定理とは，

$$\alpha, \Gamma \vdash_{HJ} \beta \quad \text{ならば} \quad \Gamma \vdash_{HJ} \alpha \supset \beta$$

が成り立つことでした．この**推論可能性関係** $\vdash_{HJ}$ を拡張し，関係 $\vdash_L$ を任意の中間命題論理Lに対して次のように定めます．任意の論理式の集合 $\Gamma$ および任意の論理式 $\alpha$ に対し，$\Gamma, \mathrm{L} \vdash_{HJ} \alpha$ となるとき，またそのときに限り $\Gamma \vdash_L \alpha$ と表し，$\alpha$ はLにおいて $\Gamma$ から**推論可能 (deducible)** ということにします[2]．HJ の演繹定理から次の結果がただちに導かれます．

**定理 4.1.19** 任意の中間命題論理Lに対して演繹定理が成り立つ．

1) 定義 4.1.18 の3つの条件を満たすLが与えられたとき，HJ にLに属すすべての論理式を公理型として付け加えた体系を L′ とすると，論理式の集合 $\widetilde{\mathrm{L}'}$ はLに一致することが証明できます．このことから定義 4.1.18 に与えた中間論理の定義は最初に述べた HJ の拡張体系としての中間命題論理の定義とは本質的に同等であることが分かります．

2) $\Gamma, \mathrm{L} \vdash_{HJ} \alpha$ に現れるLは論理式の集合を表していることに注意してください．

一般的な形で定義された中間命題論理はどのくらい多いのでしょうか．中間命題論理が無限に存在することは中間命題論理の研究が始まって間もなく分かりましたが，1960 年代になって次の結果が示されました．

**定理 4.1.20**　中間命題論理は非可算存在する．

中間論理 L が公理型を有限個つけ加えて得られる HJ の拡張体系と一致するとき，L は**有限公理化可能**であるといいます．公理型の全体は可算ですから，公理型の有限集合全体も可算です．したがって有限公理化可能な中間命題論理は可算です．このことと上の定理から，有限公理化可能でないような中間命題論理が非可算存在することが分かります．

3.1.3 節で定義した論理和分離性は一般の中間命題論理に対して定義することができます．すなわち，L が**論理和分離性**をもつとは，任意の論理式 $\alpha, \beta$ に対し，$\alpha \vee \beta \in \mathrm{L}$ ならば $\alpha \in \mathrm{L}$ または $\beta \in \mathrm{L}$ となることとします．論理和分離性をもつ中間論理は無限に存在することが分かっています．

クリプキ構造 $\langle S, \leq \rangle$ で恒真になるような命題論理の論理式全体の集合を $L\langle S, \leq \rangle$ と表します．すると $L\langle S, \leq \rangle$ は中間命題論理になることが示されます．中間命題論理 L に対して

$$\mathrm{L} = L\langle S, \leq \rangle$$

となるクリプキ構造 $\langle S, \leq \rangle$ が存在するとき，L は**クリプキ完全**であるといいます．論理 L がクリプキ完全であるというこの定義は，クリプキ構造の集合 $\{\langle S_i, \leq_i \rangle \mid i \in I\}$ が存在して

$$\mathrm{L} = \bigcap_{i \in I} L\langle S_i, \leq_i \rangle$$

と表される，という形で言い換えることができます．実際，このような集合 $\{\langle S_i, \leq_i \rangle \mid i \in I\}$ に対して，$\langle S_i, \leq_i \rangle$ の**直和順序集合**を $\langle S, \leq \rangle$ とすると[3]，

$$L\langle S, \leq \rangle = \bigcap_{i \in I} L\langle S_i, \leq_i \rangle$$

が成り立ちます．この場合，L はクリプキ構造の集合 $\{\langle S_i, \leq_i \rangle \mid i \in I\}$ により**決定される**といいます．

古典命題論理は $L\langle \{c\}, \leq \rangle$ と表されるのでクリプキ完全です．また定理 4.1.14 より直観主義命題論理がクリプキ完全であることが分かります．クリプキ構造は扱いやすいために中間命題論理の意味論として大変有用ですが，次の定理に示されるような限界をもっています．

**定理 4.1.21**　クリプキ完全でないような中間命題論理が (非可算) 存在する．したがっ

3)　つまり，$S$ を $\bigcup_{i \in I} (S_i \times \{i\})$ とし，$(a, i) \leq (b, j)$ が成り立つのは $i = j$ かつ $a \leq_i b$ と定める．

て有限公理化可能であるがクリプキ完全でないような中間命題論理が存在する．

古典命題論理より真に弱い中間命題論理のうちでもっとも強いもの (すなわち包含関係に関して最大のもの)，すなわち，古典命題論理の次に強い中間命題論理が存在します．この論理はクリプキ構造を使って $L\langle\{a, b\}, \leq\rangle$(ただし $a < b$) と表されます．

▶ **問題 4.1.22**　クリプキ構造 $\langle\{a, b\}, \leq\rangle$ の付値 $\models$ で論理式 $p \vee \neg p$ を偽にするものを与えよ．

他方，直観主義論理より真に強い中間命題論理のうちでもっとも弱いものは存在しません．

**定理 4.1.23**　中間命題論理 L が直観主義論理と異なるならば，$\mathrm{L} \supsetneq \mathrm{L}'$ となる中間命題論理 L′ で直観主義論理と異なるものが存在する．

実際に，$\alpha$ を論理 L に含まれるが直観主義論理で証明可能でない論理式とし，$q$ を $\alpha$ に現れない命題変数とすると，HJ に公理型 $q \vee (q \supset \alpha)$ を付け加えた論理 L′ は，L より真に弱いが直観主義論理より真に強いことを示すことができます．

▶ **問題 4.1.24**　論理式 $\alpha$ が直観主義論理で証明可能でないなら，論理式 $q \vee (q \supset \alpha)$ もまた直観主義論理で証明可能でないことを確かめよ (直観主義論理の論理和分離性を使ってみよ)．

4.1.4 節で，クリプキ完全の条件を強めた概念として有限モデル特性が定義されました．この節での表現方法を使うと，中間命題論理 L が有限モデル特性をもつとは，「有限なクリプキ構造」からなるある集合 $\{\langle S_i, \leq_i\rangle \mid i \in I\}$ ($I$ は無限でもよい) に対し

$$\mathrm{L} = \bigcap_{i \in I} L\langle S_i, \leq_i\rangle$$

と表されることになります．論理 L が有限モデル特性をもつなら明らかにクリプキ完全ですが，逆は一般には成り立ちません．古典命題論理や直観主義命題論理は有限モデル特性をもっています．

次のハロップ (Harrop) の補題が示すように，有限モデル特性は論理の決定可能性，つまり任意に与えられた論理式がその論理で証明可能であるかどうかを判定する方法の存在，を示すための 1 つの有効な手段を与えます．しかし，この補題の証明から得られる決定手続きは一般的にはきわめて非効率的です．

**定理 4.1.25 (ハロップの補題)**　有限公理化可能でさらに有限モデル特性をもつ論理は決定可能である．

定理 4.1.20 より決定可能でない中間命題論理が存在することは明らかです．有限公理化可能であるが決定可能でない中間命題論理や，決定可能だが有限モデル特性をもたない中間命題論理の存在などが知られています．

### 発展

直観主義の立場からの数学の展開についての代表的な文献としては[17]があります．直観主義論理のもつ論理的な性質やクリプキによる意味論についてさらに学びたい読者は入門的な[14]や[17]を参照してください．

中間命題論理については数多くの興味深い結果が得られています．その際に有効な道具として使われているのは，一般化されたクリプキの意味論と代数的な方法です．また，中間論理と 4.3 節で述べる様相論理との関係は中間論理を理解する上で欠かすことができません．中間述語論理に対しては一般論を展開するために必要な意味論の研究がまだ十分に発展していません．そのため数多くの興味ある問題が未解決のまま残されています．

## 4.2. 論理と代数

直観主義論理や中間論理の意味論としてすでにクリプキ構造を導入しましたが，ここではもう 1 つの代表的なアプローチである代数構造による意味論について述べます．歴史的には代数的意味論はクリプキ構造による意味論より早くから研究されていましたが，1960 年代からのクリプキ構造による意味論の目覚ましい発展の中でややその影が薄れていました．しかし 90 年代になり新たな視点からの研究が始まり，**普遍代数 (universal algebra)** や**代数的論理学 (algebraic logic)** の成果を結びつける分野として大きく発展していくものと期待されています．4.2.3 節では代数的論理学の 1 つの基本的な概念である代数化定理を紹介し，また 4.2.4 節では普遍代数における基礎的な結果を述べることにします．

### 4.2.1 ハイティング代数とブール代数

論理に関連するいくつかの基本的な代数構造の導入のために，まず基礎となる数学的概念を以下で述べることにします．そのうちのいくつかはすでにこの本に現れていますが[4)]，改めて整理した形でまとめて述べておきたいと思います．

**定義 4.2.1** 集合 $P$ 上の 2 項関係 $\leq$ が任意の $a, b, c \in P$ に対し次の 3 つの性質をもつとき，構造 $\mathbf{P} = \langle P, \leq \rangle$ を**順序集合 (partially ordered set)** という：

1. $a \leq a$ (反射律),
2. $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$ (推移律),
3. $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$ (反対称律).

4) たとえば 3 章の定義 3.2.5 の中で擬順序と順序が定義されています．

このような関係 $\leq$ を**順序** (**partial order**) といいます．たとえば $R$ を実数全体の集合とし，$\leq$ を実数の間の大小関係とすると，$\langle R, \leq \rangle$ は順序集合になります．ただし一般の順序関係は，この順序集合 $\langle R, \leq \rangle$ の場合のように，集合 $P$ の元が一列に並んだものだけを考えているわけではありません．たとえば $N^+$ を正整数全体の集合とし，その上の 2 項関係 $|$ を

$$k \mid m \iff k \text{ が } m \text{ の約数である}$$

として定義すると，$\langle N^+, | \rangle$ は順序集合になりますが，$3 \mid 5$ も $5 \mid 3$ も成り立ちません．一列に並んでいる順序，つまり任意の $a, b$ に対して

$$a \leq b \quad \text{または} \quad b \leq a$$

となる順序 $\leq$ は**全順序** (**total order**) といいます．

$\langle P, \leq \rangle$ を順序集合とし，$X$ を $P$ の部分集合とします．$X$ のどの元 $d$ に対しても

$$a \leq d$$

が成り立つような $P$ の元 $a$ は $X$ の**下界**といいます．たとえば $X = \{r \in R \mid 5 \leq r^2 < 8\}$ とすると 0 も 1.5 も 2.2 も $X$ の下界になります．$X$ の下界のうちで最大なものが存在するとき，その元を $\inf X$ と表し，$X$ の**下限**といいます．上の例の場合，$X$ の下限は $\sqrt{5}$ です．下限はいつも存在するとは限りません．たとえば上の $X$ の代わりに部分集合 $Y = \{r \in R \mid 5 < r^2 < 8\}$ をとると，やはり 1.5 も 2.2 も $Y$ の下界にもなりますが，$Y$ の下界のなかで最大のものは存在しません．(大小を逆に考えることにより) 同様にして $P$ の部分集合 $X$ に対し，$X$ の**上界**および**上限**を定義することができます．たとえば $X$ のどの元 $d$ に対しても

$$d \leq a$$

が成り立つような $P$ の元 $a$ を $X$ の**上界**と定義するのです．$X$ の下限と上限はそれぞれ $\bigwedge X$, $\bigvee X$ と表されます．

順序集合 $\langle P, \leq \rangle$ の任意の 2 つの元 $a, b$ からなる集合 $\{a, b\}$ が必ず下限と上限をもつとき，この順序集合は**束** (**lattice**) であるといいます．そして $\{a, b\}$ の下限と上限をそれぞれ $a \wedge b$, $a \vee b$ と表すことにします．たとえば順序集合 $\langle N^+, | \rangle$ において 2 つの正整数 $m, n$ をとると，$m$ と $n$ の最大公約数と最小公倍数がそれぞれちょうど $m \wedge n$ および $m \vee n$ になります．したがって $\langle N^+, | \rangle$ は束になります．下限 (または上限) を使うと，順序 $\leq$ は

$$a \leq b \iff a = a \wedge b \iff b = a \vee b$$

と表されます．そのため順序集合 $\langle P, \leq \rangle$ が束である場合には，$\leq$ を明示せずに $\langle P, \wedge, \vee \rangle$ という三つ組により束を表すことがあります．改めてここで $\wedge$ と $\vee$ の満たすべき性質を整理しておきましょう．$\langle P, \wedge, \vee \rangle$ を束とすると，$a, b \in P$ に対し

- $a \wedge b \leq a$ かつ $a \wedge b \leq b$,
- $c \leq a$ かつ $c \leq b$ ならば $c \leq a \wedge b$

であり，また

- $a \leq c$ かつ $b \leq c$ ならば $a \vee b \leq c$,
- $a \leq a \vee b$ かつ $b \leq a \vee b$

となります．これら 4 つの代数的条件とこの章の初めに述べた LJ の $\wedge$ および $\vee$ に関する規則の間には明らかな類似性が見られます．この類似性がこのあとで述べる論理への代数的アプローチの出発点となります．束の条件を強めて，$P$ の任意の部分集合 $X$ に対し $X$ の上限と下限が存在するとき，束 $\langle P, \wedge, \vee \rangle$ を**完備束 (complete lattice)** といいます．

これから束の構造をもついろいろな代数が登場します．それらの代数はいくつかの基本的な性質をもつ数学的構造という形で定義されます．そのような性質はしばしば**等式 (equation** または **identity)** の形で記述されます．さて，等式について述べるときには，論理式の定義の場合と同様に，意味と表現とを区別しておく必要があります．たとえば「$5 + 3 = 8$」という式の中の等号 $=$ は値の等しさを表していますが，これと「$x + y$ と $y + x$ が等しい」ことを形式的に記述するときに使う (2 変数の述語記号としての) 等号とは違うものです．混乱を避けるために，この章では後者を記号 $\approx$ で表すことにします．したがって「$x + y$ と $y + x$ が等しい」ことは $x + y \approx y + x$ と表されることになります．このような形の式 (原子論理式) のことを等式といいます．正確には，$s$ と $t$ をある言語 $\mathcal{L}$ の項とするとき，表現 $s \approx t$ を (言語 $\mathcal{L}$ の) 等式ということにします．

代数 $\mathbf{A}$ で使われるそれぞれの演算に対応した関数記号を導入する ($m$ 項演算には $m$ 変数の関数記号を導入) ことにより，$\mathbf{A}$ を表現するための言語 $\mathcal{L}$ が決まります．この言語に属す関数記号全体の集合のことを $\mathbf{A}$ の**タイプ**といいます．ただし，この言語の述語記号としては等号 $\approx$ だけをとることにしておきます．たとえば $\mathbf{A}$ が束であれば，そのタイプは $\wedge$ と $\vee$ に対応する 2 つの 2 変数の関数記号の集合のことです (記号を不必要に増やすのを避けるために，混乱が起こらない限りはこれらの関数記号も同じように $\wedge$, $\vee$ と表すことにします)．明らかに $\mathbf{A}$ は自然な形で言語 $\mathcal{L}$ の述語論理の構造と見なすことができます (第 2 章を参照)．この節では代数的な記述がしやすいように，代数 $\mathbf{A}$ とそれが定める述語論理の構造 $\mathcal{A}$ を同じものと見ることにします．$s$ が $\mathbf{A}$ のタイプに属す関数記号からなる閉項 (個体変数を含まない項) のとき，第 2 章では構造 $\mathcal{A}$ で $s$ が表す個体 ($A$ の要素) のことを $\mathcal{A}(s)$ と書きましたが，ここではそれを $s^{\mathbf{A}}$ と書くことにします[5)]．同様に「構造 $\mathcal{A}$ で等式 $s \approx t$ が正しい」という代わりに「代数 $\mathbf{A}$ で等式 $s \approx t$ が成り立つ」ということにします．したがって，$y_1, \cdots, y_n$ が等式 $s \approx t$ に現れるすべての個体変数とすると，「代数 $\mathbf{A}$ で等式 $s \approx t$ が成り立つ」ことは，

任意の $A$ の要素 $c_1, \cdots, c_n$ に対し

$$([\overline{c_1}/y_1] \cdots [\overline{c_n}/y_n]s)^{\mathbf{A}} = ([\overline{c_1}/y_1] \cdots [\overline{c_n}/y_n]t)^{\mathbf{A}}$$

が成り立つ

と表されることになります．この定義はやや複雑に見えるかもしれませんが，表している内

5) ただし，$A$ は代数 $\mathbf{A}$ の世界 (universe) です．第 2 章では $|\mathcal{A}|$ と表されています．

容はむずかしいことではありません．たとえば **A** を束とすると，$A$ のどんな要素 $a, b$ をとっても $a \wedge b$ も $b \wedge a$ も集合 $\{a, b\}$ の下限なので，明らかに $a \wedge b = b \wedge a$ です．その場合に，**A** で等式 $x \wedge y \approx y \wedge x$ が成り立つ，というのです．

まず等式に関する基本的性質を述べておきましょう．

**定理 4.2.2（等式の基本的性質）**　**A** を任意の代数，$h$ を **A** のタイプに属す $m$ 変数の関数記号とする．このとき次のことが成り立つ：

1. **A** で $x \approx x$ が成り立つ，
2. **A** で $x \approx y$ が成り立つなら $y \approx x$ が成り立つ，
3. **A** で $x \approx y$ および $y \approx z$ が成り立つなら $x \approx z$ が成り立つ，
4. **A** で $x_1 \approx y_1, \cdots, x_m \approx y_m$ のすべてが成り立つなら $h(x_1, \cdots, x_m) \approx h(y_1, \cdots, y_m)$ が成り立つ．

**定理 4.2.3**　任意の束で次の等式が成り立つ：

1. $x \wedge x \approx x$,
2. $x \wedge y \approx y \wedge x$,
3. $(x \wedge y) \wedge z \approx x \wedge (y \wedge z)$,
4. $x \wedge (x \vee y) \approx x$,
5. $x \vee x \approx x$,
6. $x \vee y \approx y \vee x$,
7. $(x \vee y) \vee z \approx x \vee (y \vee z)$,
8. $x \vee (x \wedge y) \approx x$.

▶ **問題 4.2.4**　定理 4.2.3 を証明せよ．

与えられた代数 **D** において 2 項演算 $\wedge$ と $\vee$ が定義され，さらにそれらに対して定理 4.2.3 の等式がすべて成り立つと仮定します．ここで集合 $D$ 上の 2 項関係 $\preceq$ を，$a \preceq b$ が成り立つのは，$a \wedge b = a$ のとき，またそのときに限る，と定めます．すると代数 $\mathbf{D} = \langle D, \wedge, \vee \rangle$ が束になること，つまり $\preceq$ は集合 $D$ 上の順序であり，さらに $D$ のどの 2 つの元 $a, b$ に対しても $\{a, b\}$ が (順序 $\preceq$ について) 下限と上限をもつこと，を定理 4.2.3 の等式だけを使って証明することができます．例としてここでは $\preceq$ が推移律を満たすことを示してみましょう．いま $a \preceq b$ かつ $b \preceq c$ であると仮定します．目標は $a \preceq c$ を示すことです．$\preceq$ の定義から，これらの仮定は $a \wedge b = a$ および $b \wedge c = b$ と表されます．等式の基本的性質と定理 4.2.3 の 3 の等式を使うと，次の等式が成り立ちます．

$$a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c.$$

したがって $a \preceq c$ が証明できました．

▶ **問題 4.2.5** 代数 $\langle D, \wedge, \vee \rangle$ が束になることを次のようにして確かめよ (使うことができるのは定理 4.2.3 の等式と $\preceq$ の定義，そして等式の基本的性質だけであることを注意せよ).

1. $\preceq$ が反射律と反対称律を満たすことを示せ.
2. $a \wedge b$ が $\{a, b\}$ の下限になることを示せ.
3. $a \preceq b$ が成り立つのは $a \vee b = b$ のとき，またそのときに限ることを確かめよ.
4. $a \vee b$ が $\{a, b\}$ の上限になることを示せ.

このように束は定理 4.2.3 にあげた 8 つの等式によって完全に表現することができるのです．そこでこの 8 つの等式の集まりのことを**束の公理**とよびます．等式の集まりで表現することができる代数のクラスのことを一般に**等式クラス (equational class)** とよびます．代数のどんなクラスが等式クラスになるのかは 4.2.4 節で明らかにされます.

**定義 4.2.6** 束 **A** で次の**分配律 (distributivity)** が成り立つとき，**A** を**分配束 (distributive lattice)** という：

1. $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
2. $x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

実際には上の条件の一方から他方を導くことができるので，分配束であるかどうかを調べる場合，どちらかの条件のみチェックすればいいことになります.

▶ **問題 4.2.7** 分配律の一番目の条件から二番目の条件が導かれることを確かめよ.

**定義 4.2.8** 代数 $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, 0 \rangle$ が**ハイティング代数 (Heyting algebra)** であるとは，$\langle A, \wedge, \vee \rangle$ が最小元 0 をもつ束であり，さらに任意の $a, b, c \in A$ に対して次の ($\wedge$ に関する) **剰余の法則 (the law of residuation)** が成り立つこととする.

$$a \wedge b \leq c \iff b \leq (a \rightarrow c)$$

剰余の法則は，集合 $\{b \mid a \wedge b \leq c\}$ に最大元が存在し，それは $a \rightarrow c$ と等しい，ということを述べています．ハイティング代数の定義には最小元 0 の存在のみを仮定しますが，実際には最大元も存在し，それが $0 \rightarrow 0$ に等しいことが証明できます．なぜならどんな $a \in A$ に対しても $0 \wedge a \leq 0$ ですが，剰余の法則を使うと $a \leq 0 \rightarrow 0$ が導かれるからです．この最大元 $0 \rightarrow 0$ をこれからは 1 と表します.

▶ **問題 4.2.9** ハイティング代数においてはつねに分配律が成り立つことを示せ.

束では，「不等式」$x \leq y$ は

$$x \wedge y \approx x$$

という等式で置き換えることができるので，$x \leq y$ の形の表現も等式の省略形と見なすことにします．さて，剰余の法則は次のように LJ の $\to$ の規則に似た形で表すことができます．

- $x \wedge (x \to y) \leq y$,
- $x \wedge z \leq y$ ならば $z \leq (x \to y)$.

ところがこれら 2 つは次の 2 つの「不等式」で置き換えることができます．したがってハイティング代数のクラスも等式クラスであることが分かります．

- $x \wedge (x \to y) \leq y$,
- $z \leq (x \to ((x \wedge z) \vee y))$.

ハイティング代数において 1 項演算 $\neg$ を $\neg a = a \to 0$ により定義します．すると明らかに次の関係が成り立ちます．

- $a \wedge \neg a = 0$,
- $a \wedge c = 0$ ならば $c \leq \neg a$.

**定義 4.2.10**　次の等式

$$x \vee \neg x \approx 1$$

が成り立つハイティング代数をブール代数 **(Boolean algebra)** という．

明らかにブール代数のクラスも等式クラスです．ブール代数では次の等式が成り立ちます．

1. $\neg(\neg x) \approx x$,
2. $\neg(x \vee y) \approx \neg x \wedge \neg y$,
3. $\neg(x \wedge y) \approx \neg x \vee \neg y$,
4. $x \to y \approx \neg x \vee y$.

▶ **問題 4.2.11**　上の等式がブール代数で成り立つことを示せ．また 2 の等式はハイティング代数でも成り立つことを確かめよ．

もっとも代表的なブール代数は次のように与えられます．$U$ を集合とし，$P(U)$ を $U$ のべき集合，つまり $U$ の部分集合全体の集合とします．$U$ の部分集合 $V$ と $W$ に対して，その共通部分 $V \cap W$ とその和集合 $V \cup W$ も明らかに $U$ の部分集合です．実際，$\langle P(U), \cap, \cup \rangle$ は完備な分配束になります．さらに空集合 $\emptyset$ は $U$ の部分集合ですし，$U$ の部分集合 $V$ の補集合 $-V$ も $U$ の部分集合です．そこで $-V \cup W$ を $V \to W$ と表すと $-V = V \to \emptyset$ となり，さらに $V \cup -V = U$ が成り立つので，結局

$$\mathbf{P_U} = \langle P(U),\ \cap,\ \cup,\ \to,\ \emptyset \rangle$$

はブール代数になることが分かります．このようにある集合のべき集合がつくるブール代数のことを**集合ブール代数**といいます．

集合 $\{0, 1\}$ 上の演算 $\wedge, \vee, \to$ を

- $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$,
- $a \to b = 1 \iff a = 0$ または $b = 1$

と定めると，$\langle\{0, 1\}, \wedge, \vee, \to, 0\rangle$ はブール代数になります．このブール代数は **2 値のブール代数**とよばれ，$0 \neq 1$ となるブール代数のうち最小のものになります．1 章の古典命題論理の意味論で '⊤' を 1，'⊥' を 0 と書き換えると，$\wedge, \vee, \to$ の真理表の定義はちょうどここで導入された演算と一致しています．

ここでさらに 4.4 節で重要な役割を果たす代数系である半群とモノイドについてもその定義を述べておきましょう．

**定義 4.2.12** 代数 $\mathbf{A} = \langle A, \cdot\rangle$ が**半群 (semigroup)** であるとは，2 項演算 $\cdot$ が結合律を満たすこと，つまり

$$x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$$

が成り立つことである．単位元をもつ半群を**モノイド (monoid)** という．ただし，1 が単位元であるとは

$$x \cdot 1 \approx 1 \cdot x = x$$

が成り立つことである．モノイドのそれぞれの要素 $x$ が逆元 $x^{-1}$ をもつとき，つまり

$$x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x = 1$$

が成り立つときには**群 (group)** という．

これらの代数系はすべて等式により定義されます．2 項演算 $\cdot$ が可換であるとき，つまり

$$x \cdot y \approx y \cdot x$$

が成り立つときには，それぞれ可換半群，可換モノイド，可換群 (またはアーベル群) といわれます．

### 4.2.2 代数的完全性

これで準備ができたので，これから論理と代数の関係を明らかにしていきましょう．1 章では付値という概念を使ってトートロジーを定義し，トートロジーと古典命題論理の証明可能性とが一致することを示しました (健全性と完全性)．その議論を代数を使った意味論に拡張してみましょう．まず直観主義命題論理について考えます．

**A** をハイティング代数とします．$f$ が命題変数全体の集合から集合 $A$ への写像のとき，$f$ は **A** の上の付値であるといいます．**A** の上の付値 $f$ を次のように論理式全体の集合から $A$ への写像に拡張します (1 章と同様に拡張した写像も $f$ と書くことにします)．

1. $f(\bot) = 0$,
2. $f(\alpha \supset \beta) = f(\alpha) \to f(\beta)$,　$f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$,　$f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$[6]．

ハイティング代数 **A** の上の任意の付値 $f$ に対して

$$f(\alpha) = 1$$

のとき，論理式 $\alpha$ は **A** で**恒真**であるといいます．任意の LJ の推件式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \beta$ に対してもこの定義を拡張し，任意の付値 $f$ に対して

$$f(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f(\alpha_m) \leq f(\beta)$$

のとき，この推件式は **A** で恒真であるということにします．ただし，$m = 0$ であれば $f(\beta) = 1$，そして $\beta$ がないときは $f(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f(\alpha_m) = 0$ を代わりにとることにしておきます．

ブール代数は同時にハイティング代数ですから，上で述べた付値や恒真の定義はそのままブール代数に適用されます．ただし，ブール代数の場合には古典命題論理との関係を議論する必要があるので，$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \beta_1, \cdots, \beta_n$ の形をした LK の推件式について恒真性を定義する必要があります．すなわち，この推件式がブール代数 **A** で恒真であるとは，任意の付値 $f$ に対して

$$f(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f(\alpha_m) \leq f(\beta_1) \vee \cdots \vee f(\beta_n)$$

であることとします．

**定理 4.2.13（直観主義命題論理のハイティング代数に関する健全性）**　任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が体系 HJ で証明可能ならば，$\alpha$ は任意のハイティング代数で恒真である．

**証明**　HJ と LJ は同等ですから，この定理の証明のためには，LJ で証明可能などんな推件式 $\Gamma \to \beta$ も任意のハイティング代数 **A** で恒真になることを示せばよいことが分かります．これを推件式 $\Gamma \to \beta$ の証明の長さに関する帰納法で示します．この推件式が公理型のときは $\beta \to \beta$ または $\bot \to \beta$ の形ですが，任意の付値 $f$ に対し

$$f(\beta) \leq f(\beta) \quad \text{および} \quad f(\bot) = 0 \leq f(\beta)$$

が成り立つので，これらは恒真です．公理型でなければ $\Gamma \to \beta$ はある推論規則の下式にな

6)　以下では，記号 $\to$ が代数演算と推件式の矢印の両方に使われています．ただその文脈に注意すれば，この 2 つを混同することはないと思います．

ります．帰納法の仮定から，この推論規則の上式は恒真です．$\Gamma \to \beta$ の恒真性を確かめるためには，どの推論規則が適用されたかにより場合分けする必要があります．ここでは $(\to \wedge)$ の場合について考えてみます．ここで上式が $\Gamma \to \delta$ と $\Gamma \to \varepsilon$ とすると，$\beta$ は $\delta \wedge \varepsilon$ になります．$\Gamma$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ とし，さらに付値 $f$ に対し $f(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge f(\alpha_m)$ を $d$ とします（$\Gamma$ がないときは $d = 1$ とします）．すると帰納法の仮定から $d \leq f(\delta)$ かつ $d \leq f(\varepsilon)$ ですが，ここで束の $\wedge$ の性質

$$c \leq a \text{ かつ } c \leq b \quad \text{ならば} \quad c \leq a \wedge b$$

を使うと，求める結果 $d \leq f(\delta \wedge \varepsilon) = f(\beta)$ が得られます． □

上の証明で，適用された推論規則が cut の場合の証明には，$\leq$ が推移律を満たすことが使われていることを注意しておきます．

▶ **問題 4. 2. 14**

1. 定理 4.2.13 の証明において，適用された推論規則が cut の場合に，2 つの上式が恒真ならば下式も恒真になることを確かめよ．
2. $a, b, c, d, e$ を与えられたハイティング代数の要素とする．$c \leq a$ と $b \wedge d \leq e$ が成り立つならば $(a \to b) \wedge c \wedge d \leq e$ となることを示せ．
3. この結果を使って，定理 4.2.13 の証明で，適用された推論規則が $(\supset\to)$ の場合に 2 つの上式が恒真ならば，下式も恒真になることを示せ．

**定理 4. 2. 15（古典命題論理のブール代数に関する健全性）** 任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が体系 HK で証明可能ならば，$\alpha$ は任意のブール代数で恒真である．

**証明** LJ の代わりに LK の推件式と推論規則をとれば，証明は前定理とほとんど同様に行われます．ブール代数の性質が必要になるのは $(\to\supset)$ と $(\to \neg)$ です．ここでは $(\to\supset)$ についてその証明を示しましょう．簡単のために，その上式が $\alpha, \gamma \to \theta, \beta$ で，下式が $\gamma \to \theta,\ \alpha \supset \beta$ とします．任意にブール代数 $\mathbf{A}$ とその上の付値 $f$ をとります．$a = f(\alpha)$, $c = f(\gamma)$, $d = f(\theta)$, $b = f(\beta)$ とすると，帰納法の仮定から $a \wedge c \leq d \vee b$ が成り立ちます．まず $b \leq a \to b$ より

$$a \wedge c \leq d \vee b \leq d \vee (a \to b).$$

また $a \wedge \neg a = 0 \leq b$ より，剰余の法則を使うと $\neg a \leq a \to b$ ですから，

$$\neg a \wedge c \leq \neg a \leq a \to b \leq d \vee (a \to b).$$

ここでブール代数の性質 $a \vee \neg a = 1$ と分配律，そして $\vee$ の性質を使うと，上の 2 つの式から

$$c = (a \vee \neg a) \wedge c = (a \wedge c) \vee (\neg a \wedge c) \leq d \vee (a \to b)$$

すなわち $f(\gamma) \leq f(\theta) \vee f(\alpha \supset \beta)$ が示されます． □

これら2つの定理の逆，すなわち完全性も成り立ちます．古典命題論理の場合には，論理式 $\alpha$ が任意のブール代数で恒真ならば，とくに2値のブール代数でも恒真になりますが，このことは $\alpha$ がトートロジーであることを意味します．ところがトートロジーならばLKで証明可能になることを1章ですでに示していますから，次の完全性が証明できます．

**定理 4.2.16（古典命題論理のブール代数に関する完全性）**　任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が任意のブール代数で恒真ならば $\alpha$ はHKで証明可能である．

これに対し，直観主義命題論理についてはハイティング代数に関する完全性が証明できます．

**定理 4.2.17（直観主義命題論理のハイティング代数に関する完全性）**　任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が任意のハイティング代数で恒真ならば $\alpha$ はHJで証明可能である．

この証明の詳しいことは省きますが，以下のような方針でこの対偶を示すことにより行われます．つまり $\alpha$ がHJで証明可能でないとき，$\alpha$ を偽にするような (つまり $f(\alpha) \neq 1$ となるような) ハイティング代数 $\mathbf{A}$ とその上の付値 $f$ を具体的に与えるのです．$\mathbf{A}$ をつくる際には，論理式全体の集合がハイティング代数に似た性質をもっていることがヒントになります．まず2つの論理式の間の関係 $\preceq$ を

$$\beta \preceq \gamma \iff \text{推件式 } \beta \to \gamma \text{ がLJで証明可能}$$

と定義してみます．論理式 $\beta$ と $\gamma$ からは論理記号を使ってあらたに論理式 $\beta\wedge\gamma$, $\beta\vee\gamma$, $\beta \supset \gamma$ が定義されます．すでに指摘したように，これらの論理記号に関するLJの推論規則は，$\wedge$ と $\vee$ がそれぞれ $\beta$ と $\gamma$ の下限と上限であり，また $\supset$ が剰余の法則を満たすという要請を表現しています．さらに論理式 $p \supset p$ を代数の1と思うことにすると，仮定より推件式 $p \supset p \to \alpha$ も証明可能でありませんから，$\alpha$ は1とは異なると考えられます．ですから論理式全体の集合を $\mathbf{A}$ とし，その付値 $f$ を $f(p) = p$ (したがって任意の論理式 $\beta$ に対し $f(\beta) = \beta$) とすれば，求める結果が得られるように思われます．

ところが，残念ながら関係 $\preceq$ は反射律と推移律は満たすのですが，反対称律を満たしていません．たとえば $p \preceq (p \supset p) \supset p$ と $(p \supset p) \supset p \preceq p$ は成り立ちますが，$p$ と $(p \supset p) \supset p$ は異なる論理式です．つまり論理式全体の集合はハイティング代数ではないのです．しかし次のように修正を加えることにより，このアイデアを活かした正しい証明が得られます．すなわち

$$\beta \cong \gamma$$

という関係を $\beta \preceq \gamma$ かつ $\gamma \preceq \beta$ として定めます．すると，詳細は略しますが，$\cong$ は同値関係であることが確かめられます．そこで，「この同値関係で論理式全体の集合を同値分割する」

という代数的な手続きをとることによりハイティング代数が得られます．このハイティング代数のことを，直観主義命題論理のリンデンバウム代数 **(Lindenbaum algebra)** (またはリンデンバウム・タルスキ代数) といいます．このリンデンバウム代数では，HJ で証明可能でない論理式はすべて偽になり，完全性が示されるのです．

▶ **問題 4.2.18** 上で関係 $\cong$ が同値関係であると述べた．論理式全体の集合の同値分割によってハイティング代数を得るためには，実際にはさらに $\cong$ が**合同関係 (congruence relation)** であること，つまり $\alpha \cong \delta$ および $\beta \cong \gamma$ を仮定すると

$$(\alpha \odot \beta) \cong (\delta \odot \gamma)$$

が導かれること，が必要である．ただし $\odot \in \{\wedge, \vee, \supset\}$．このことを $\odot$ が $\wedge$ と $\supset$ の場合について確かめてみよ．

定理 4.1.21 はクリプキ完全でない中間論理の存在について述べていますが，どんな中間論理もリンデンバウム代数を使うことにより，次の結果が得られます．

**定理 4.2.19** 任意の中間論理 L に対しハイティング代数のある等式クラス $\mathcal{K}$ が存在し，L は $\mathcal{K}$ に関して完全である．すなわち任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が L に属することと，$\alpha$ が $\mathcal{K}$ に属すすべてのハイティング代数で恒真であることとは同値である．

最後に，クリプキ構造とハイティング代数の関係について触れておきます．クリプキ構造 $\langle S, \leq \rangle$ において $S$ の遺伝的な部分集合全体を $H(S)$ とします．空集合 $\emptyset$ はもちろん $H(S)$ に属しますし，また $H(S)$ に属す 2 つの集合 $U$ と $V$ の共通部分 $U \cap V$ と和集合 $U \cup V$ はともに $H(S)$ に属します．さらに $S$ の部分集合

$$\{x \in \mid \text{すべての } y \geq x \text{ に対し，} y \notin U \text{ または } y \in V\}$$

を $U \rhd V$ と表すと，$U \rhd V$ も $H(S)$ に属することが分かります．そこで

$$\mathbf{H_S} = \langle H(S), \cap, \cup, \rhd, \emptyset \rangle$$

と定めると，この $\mathbf{H_S}$ はハイティング代数になります．そのうえ

任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ がクリプキ構造 $\langle S, \leq \rangle$ で恒真であることと，$\alpha$ がハイティング代数 $\mathbf{H_S}$ で恒真であることとは同値である

が証明できます．このようにしてクリプキ構造からその恒真性を保つようなハイティング代数をつくることができます．

ところが，逆にハイティング代数からその恒真性を保つようにしてクリプキ構造を作ることとは必ずしも可能ではありません．その結果としてクリプキ完全でない中間論理が生ずることになるのです．ここで触れたクリプキ構造とハイティング代数の関係は，ハイティング代数に対するストーン **(Stone)** の**表現定理**という代数の結果に密接に関連しています．

### 4.2.3　代数化定理

前節では付値を使って代数的な計算をすることにより，論理式が与えられた代数で恒真になるかどうかを確かめました．すなわち論理式 $\alpha$ が $\mathbf{A}$ で恒真になるとは，すべての付値 $f$ に対して $f(\alpha)=1$ となることでした．ここで $\alpha$ を (論理式ではなく)「$\mathbf{A}$ のタイプで構成される項」と見なすならば，$\alpha$ が $\mathbf{A}$ で恒真になるとは等式 $\alpha \approx 1$ が $\mathbf{A}$ で成り立つことであると言い換えられます．ただ，この「見なし方」には少し乱暴なところがあります．実際のところ命題変数と項の定義に使われる変数は違うものですし，論理記号とそれに対応する関数記号はもちろん違うものです (とくにこの本では含意を表す論理記号は $\supset$ であるのに対し，対応する代数演算および関数記号には $\rightarrow$ を使っています)．その一方で，「見かけの違うものを同じものと見なす」という考え方は数学においては非常に重要な役割を果たし，しばしば新たな発見に結びつくことがあります．そこで以下では論理式と項の同一視についての必要以上に厳密な議論は避けながら，混乱は引き起こさないように努めてみました．

まず命題変数と項の定義に使われる変数には同じ記号を使います[7]．さらに含意記号 $\supset$ 以外の論理記号については，その記号とそれに対応する代数演算および関数記号は同じ記号を使うことにします．第 1 章で同値であることを表す論理記号として $\leftrightarrow$ が使われていました (ただし $\alpha \leftrightarrow \beta$ は $(\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$ の省略形)．そこで代数においても $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ の省略形を $a \leftrightarrow b$ と表すことにします．

さて，与えられた論理式 $\alpha$ に対し，その中に現れる論理記号をすべて対応する関数記号で置き換えて得られる項を $\alpha^\tau$ とします．逆に，与えられた項 $s$ に対し，その中に現れる関数記号をすべて対応する論理記号で置き換えて得られる論理式を $s^\varphi$ とします[8]．$\alpha$ と $\alpha^\tau$，および $s^\varphi$ と $s$ は論理式であるか項であるかの違いはありますが，記号列としては ($\supset$ と $\rightarrow$ の違いを除くと) 全く同じです．明らかに $(\alpha^\tau)^\varphi$ と $\alpha$，$(s^\varphi)^\tau$ と $s$ はそれぞれ同じ論理式，同じ項になります．

ようやく準備ができたので，本論に戻りたいと思います．定理 4.2.13 および定理 4.2.17 から次の結果が得られます．

**定理 4.2.20**

1. 任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が体系 HJ で証明可能なとき，またそのときに限り，等式 $\alpha^\tau \approx 1$ は任意のハイティング代数で成り立つ．
2. 逆に，(ハイティング代数のタイプからなる) 任意の項 $s$ と $t$ に対し，等式 $s \approx t$ が任意のハイティング代数で成り立つとき，またそのときに限り，論理式 $s^\varphi \leftrightarrow t^\varphi$ は体系 HJ で証明可能である．

---

7)　このような仮定を避けたいなら，命題変数全体の集合と項の定義に使われる変数全体の集合の間に一対一の対応があると考えてください．

8)　$\tau$ は term(項)，$\varphi$ は formula(論理式) を表しています．

**証明**　1 は定理 4.2.13 と定理 4.2.17 の結果の言い換えです．2 を示すために $s^\varphi \leftrightarrow t^\varphi$ が体系 HJ で証明可能であるとします．すると 1 より，このことと $(s^\varphi \leftrightarrow t^\varphi)^\tau \approx 1$ が任意のハイティング代数で成り立つことが同値です．ところで，この等号の左辺は $s \leftrightarrow t$ と同じです．ここで任意のハイティング代数 $\mathbf{A}$ およびその上の任意の付値 $h$ に対し，以下の 4 つの条件は明らかに同値です．

- $h(s \leftrightarrow t) = 1$,
- $h(s \to t) = 1$ かつ $h(t \to s) = 1$,
- $h(s) \leq h(t)$ かつ $h(t) \leq h(s)$,
- $h(s) = h(t)$.

1 番目の条件と 4 番目の条件の同値性から，$(s^\varphi \leftrightarrow t^\varphi)^\tau \approx 1$，すなわち $s \leftrightarrow t \approx 1$ が任意のハイティング代数で成り立つことと，等式 $s \approx t$ が任意のハイティング代数で成り立つことが同値であることが導かれ，したがって 2 が証明されました． □

同様な結果は体系 HK とブール代数についても得られますが，それだけでなく任意の中間論理についても示すことができます．

代数 $\mathbf{A}$ が与えられたと仮定します．$s_1, \cdots, s_m, t_1, \cdots, t_m, u, v$ をその代数のタイプからなる任意の項とします．このとき

$$s_1 \approx t_1 \text{ and } \cdots \text{ and } s_m \approx t_m \text{ implies } u \approx v$$

の形の表現を**準等式** (**quasiequation** または **quasi-identity**) といいます[9]．この準等式が代数 $\mathbf{A}$ で成り立つとは，$\mathbf{A}$ 上の任意の付値 $h$ に対して，

$$\text{すべての } i \,(\text{ただし } 1 \leq i \leq m) \text{ について} \quad h(s_i) = h(t_i) \text{ ならば } h(u) = h(v)$$

となることとします．そうすると，たとえば定理 4.2.20 の証明で示されたのは，2 つの準等式

- $s \leftrightarrow t \approx 1$ implies $s \approx t$,
- $s \approx t$ implies $s \leftrightarrow t \approx 1$

が任意のハイティング代数で成り立つ，ということになります．上の準等式で $m = 0$ の場合は，等式 $u \approx v$ に一致します．

定理 4.2.20 は，体系 HJ における証明可能性はハイティング代数のクラスにおける等式の恒真性に置き換えられることを示しています．次に述べるように，この結果は「体系 HJ における**推論可能性**はハイティング代数のクラスにおける**準等式**の恒真性に置き換えられる」と

9)　この表現は内容的には述語論理の論理式

$$(s_1 \approx t_1 \wedge \cdots \wedge s_m \approx t_m) \to u \approx v$$

と一致しますが，項の中に同じ記号 $\wedge$ や $\to$ が関数記号として現れる可能性があるので，混乱を避けるためにこのような書き方にしています．

いう結果にまで拡張されます．この結果を HJ に対する (Blok-Pigozzi の意味での) **代数化定理 (algebraization theorem)** といいます．

**定理 4.2.21 (直観主義論理に対する代数化定理)**

1. 任意の命題論理の論理式 $\beta_1, \cdots, \beta_n, \alpha$ に対し，
$$\beta_1, \cdots, \beta_n \vdash_{HJ} \alpha$$
であるための必要十分条件は，準等式
$$(\beta_1)^\tau \approx 1 \text{ and } \cdots \text{ and } (\beta_n)^\tau \approx 1 \text{ implies } \alpha^\tau \approx 1$$
が任意のハイティング代数で成り立つことである．
2. 逆に，(ハイティング代数のタイプからなる) 任意の項 $s_1, \cdots, s_m, t_1, \cdots, t_m, u, v$ に対し，準等式
$$s_1 \approx t_1 \text{ and } \cdots \text{ and } s_m \approx t_m \text{ implies } u \approx v$$
が任意のハイティング代数で成り立つための必要十分条件は，
$$(s_1)^\varphi \leftrightarrow (t_1)^\varphi, \cdots, (s_m)^\varphi \leftrightarrow (t_m)^\varphi \vdash_{HJ} u^\varphi \leftrightarrow v^\varphi$$
となることである．

この定理の証明は定理 4.2.20 の証明を少しだけ修正することにより得られます．とくに定理 4.2.20 の場合と同じように，1 と 2 は互いに他から導かれます．1 の必要性は，体系 HJ (または LJ) における推論図の長さによる帰納法により証明することができます．他方，その十分性については，(見かけ上それより強い) 2 の必要性を示すことにより得られます．すなわち (対偶をとって)，$(s_1)^\varphi \leftrightarrow (t_1)^\varphi, \cdots, (s_m)^\varphi \leftrightarrow (t_m)^\varphi \vdash_{HJ} u^\varphi \leftrightarrow v^\varphi$ でないと仮定して，
$$s_1 \approx t_1 \text{ and } \cdots \text{ and } s_m \approx t_m \text{ implies } u \approx v$$
が成り立たないようなハイティング代数を与えるのです．そこで定理 4.2.17 の証明で使ったリンデンバウム代数と似たような考え方をします．ただし，2 つの論理式の間の関係 $\preceq$ はここでは
$$\beta \preceq \gamma \iff (s_1)^\varphi \leftrightarrow (t_1)^\varphi, \cdots, (s_m)^\varphi \leftrightarrow (t_m)^\varphi \vdash_{HJ} \beta \to \gamma$$
と定義します．その上で $\beta \cong \gamma$ という関係を $\beta \preceq \gamma$ かつ $\gamma \preceq \beta$ として定めるのです．このように変更しても得られる代数はハイティング代数になり，さらにその代数では $s_1 \approx t_1$ and $\cdots$ and $s_m \approx t_m$ implies $u \approx v$ が成り立たないことを証明できます．

この代数化定理は (古典論理を含む) すべての中間論理について成り立ちます．この定理の証明はむずかしくはありませんが，定理が主張している「推論可能性関係は (等式間の含意を

議論する) 準等式理論に完全に翻訳できる」ことは，論理研究における代数的アプローチの有効性の根拠を与えるとともに，論理的方法を代数の研究に応用する可能性を示唆します．その一例として，この代数化定理をハイティング代数の準等式理論の決定問題に応用してみましょう．いまハイティング代数のクラス $\mathcal{K}$ が与えられているとします．クラス $\mathcal{K}$ の準等式理論が決定可能であるとは，(ハイティング代数のタイプにより構成される項からなる) 準等式が任意に与えられたとき「その準等式がクラス $\mathcal{K}$ に属するすべてのハイティング代数で成り立つかどうかを判定する決定手続が存在すること」とします．決定可能でなければ決定不能といいます．

**定理 4.2.22**
1. HJ の推論可能性は決定可能である．
2. ハイティング代数全体のクラスの準等式理論は決定可能である．

**証明**　1．直観主義論理の演繹定理により，与えられた推論可能性関係 $\beta_1, \cdots, \beta_n \vdash_{HJ} \alpha$ が成り立つかどうかは，論理式 $\beta_1 \supset \cdots \supset \beta_n \supset \alpha$ が直観主義論理で証明可能かどうかと同値です．ところが定理 4.1.4 より直観主義論理で証明可能かどうかの決定手続が存在します．したがって HJ の推論可能性は決定可能です．また 1 と代数化定理より 2 は明らかです．□

### 4.2.4　普遍代数序論

論理への代数的アプローチを代数の側から支えているのは普遍代数 (universal algebra) の研究です．その内容をこの本で詳しく述べることはできませんが，その一端としてこの節では普遍代数のもっとも基本的な概念の 1 つである variety を紹介することにします．

この節で取り上げた代数のクラスのうちの多くは等式により表現することができるもの (等式クラス) でしたし，これから紹介する論理の多くも対応する代数のクラスが等式クラスになっています．それでは一般に等式クラスは代数のクラスとしてどのような特徴をもっているのでしょうか．また，ある代数のクラスが等式クラスでないことはどのようにして確かめられるのでしょうか．これらの問いに答えるために variety という概念を導入します．

これからしばらくの間，一般的な議論が続きます．まず代数のあるタイプ $\{f_i : i \in I\}$ を 1 つ定めておき (ただし $f_i$ は $m_i$ 項の関数記号)，そのタイプをもつ代数 $\mathbf{A}$ を考えます．したがって $\mathbf{A}$ は各 $i$ について $m_i$ 項演算 ${f_i}^{\mathbf{A}}$ をもつと仮定します．とくに断らない限り，代数といえばこのようなタイプの代数のことだと思ってください[10]．とくに「2 つの代数」という場合にはその 2 つの代数は同じタイプをもつものとします．

**定義 4.2.23**　2 つの代数 $\mathbf{A} = \langle A, {f_i}^{\mathbf{A}}\ (i \in I)\rangle$, $\mathbf{B} = \langle B, {f_i}^{\mathbf{B}}\ (i \in I)\rangle$ において，$B$

10) このような抽象的ないい方が分かりにくければ，以下で代数といえば，3 つの 2 項演算 $\wedge, \vee, \rightarrow$ と 1 つの 0 項演算 0 をもつハイティング代数のことだと考えてみてください．

が $A$ の部分集合で，さらに (これらの代数がもつタイプに属す) 任意の $k$ 項関数記号 $f$ について，もし $b_1, \cdots, b_k \in B$ ならば

$$f^{\mathbf{B}}(b_1, \cdots, b_k) = f^{\mathbf{A}}(b_1, \cdots, b_k)$$

が成り立つとき，$\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ の**部分代数 (subalgebra)** という．

$Z$, $E$, $P$ をそれぞれ整数全体の集合，偶数全体の集合，正整数全体の集合とします．さらに 2 項演算として和 $+$ をとると，これらはすべて半群になります．さらに半群 $\langle E, +\rangle$, $\langle P, +\rangle$ はともに $\langle Z, +\rangle$ の半群としての部分代数，すなわち部分半群になります．他方，奇数全体の集合は和に関して半群になりません．なぜなら 2 つの奇数の和は奇数にならないからです．さらに $\langle Z, +, 0\rangle$ と $\langle E, +, 0\rangle$ は 0 を単位元とするモノイドになります．そして $\langle E, +, 0\rangle$ は $\langle Z, +, 0\rangle$ の部分モノイドになります．ところが $\langle P, +\rangle$ は和に関する単位元をもたないのでモノイドにはなりません．1 点だけからなるモノイド $\langle\{0\}, +, 0\rangle$ は明らかに $\langle Z, +, 0\rangle$ の部分モノイドのうちで最小のものになります．

いま $\mathcal{K}$ を代数のあるクラスとします．そのとき $\mathcal{K}$ に属すどれかの代数の部分代数であるような代数全体からなるクラスを $S(\mathcal{K})$ と表します．どの代数も自分自身はその代数の部分代数ですから，$\mathcal{K}$ は $S(\mathcal{K})$ に含まれます．

**定義 4.2.24**　代数 $\mathbf{A} = \langle A, f_i^{\mathbf{A}}\ (i \in I)\rangle$, $\mathbf{B} = \langle B, f_i^{\mathbf{B}}\ (i \in I)\rangle$ において，$A$ から $B$ への写像 $\phi$ が (これらの代数がもつタイプに属す) 任意の $k$ 項関数記号 $f$ および任意の $a_1, \cdots, a_k \in A$ に対し

$$\phi(f^{\mathbf{A}}(a_1, \cdots, a_k)) = f^{\mathbf{B}}(\phi(a_1), \cdots, \phi(a_k))$$

となるとき，$\phi$ は $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への**準同形写像 (homomorphism)** であるという．$\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ の上への準同形写像が存在するとき，$\mathbf{B}$ は $\mathbf{A}$ の**準同形像 (homomorphic image)** であるという[11]．その準同形写像が $\phi$ ならば $\mathbf{B}$ を $\phi(\mathbf{A})$ と表す．また準同形写像 $\phi$ が一対一で上への写像であるとき，$\phi$ は**同形写像 (isomorphism)** であるという．$\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ への同形写像が存在するとき，$\mathbf{A}$ は $\mathbf{B}$ と**同形 (isomorphic)** であるという．

集合 $\{0, 1\}$, $\{0, a, 1\}$, $\{0, b, c, 1\}$ の上に順序 $\leq_1$, $\leq_2$, $\leq_3$ をそれぞれ

$$0 <_1 1, \quad 0 <_2 a <_2 1, \quad 0 <_3 b, c <_3 1 \quad (\text{ただし } b \text{ と } c \text{ の間には順序関係はない})$$

と定めると，どれも 0 が最小元，1 が最大元であるような束になります．それらを $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$

11) $\phi$ が「上への」写像であるとは，どんな $b \in B$ もある $a \in A$ により $\phi(a) = b$ と表されることです．

とします[12]. $L_3$ から $L_1$ への写像 $\phi$ を

$$\phi(1) = \phi(b) = 1, \quad \phi(c) = \phi(0) = 0,$$

また $L_3$ から $L_2$ への写像 $\psi$ を

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(b) = \psi(c) = a, \quad \psi(0) = 0$$

と定めます. すると $\phi$ は準同形写像ですが, $\psi$ はそうではありません. 実際に, $\psi(b \vee c) = \psi(1) = 1$ ですが $\psi(b) \vee \psi(c) = a \vee a = a$ となり, $\psi(b \vee c) = \psi(b) \vee \psi(c)$ が成り立たないからです.

代数のクラス $\mathcal{K}$ に対し, $\mathcal{K}$ に属すどれかの代数の準同形像であるような代数全体からなるクラスを $H(\mathcal{K})$ と表します. 同様に, $\mathcal{K}$ に属すどれかの代数と同形な代数全体からなるクラスを $I(\mathcal{K})$ と表します. どの代数も自分自身はその代数の恒等写像による (準) 同形像ですから, $\mathcal{K}$ は $H(\mathcal{K})$ および $I(\mathcal{K})$ に含まれます.

▶ **問題 4.2.25**

1. $\mathbf{B}$ が $\mathbf{A}$ の部分代数で, さらに $\mathbf{C}$ が $\mathbf{B}$ の部分代数ならば, $\mathbf{C}$ は $\mathbf{A}$ の部分代数であることを確かめよ.
2. $\mathbf{B}$ が $\mathbf{A}$ の写像 $\phi$ による準同形像で, さらに $\mathbf{C}$ が $\mathbf{B}$ の写像 $\psi$ による準同形像であるとする. このとき合成写像 $\psi \circ \phi$ は $\mathbf{A}$ から $\mathbf{C}$ の上への準同形写像になることを確かめよ.

集合 $A$ と $B$ に対し, その**直積集合** $A \times B$ は $A$ の要素 $a$ と $B$ の要素 $b$ からなるすべての**順序対** $\langle a, b\rangle$ をその要素とします[13]. 順序対 $\langle a, b\rangle$ の $a$, $b$ をそれぞれ $\langle a, b\rangle$ の第 1 成分, 第 2 成分といいます.

**定義 4.2.26**　与えられた代数 $\mathbf{A} = \langle A, f_i^{\mathbf{A}}\ (i \in I)\rangle$ と $\mathbf{B} = \langle B, f_i^{\mathbf{B}}\ (i \in I)\rangle$ の**直積 (direct product)**$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とは代数

$$\langle A \times B, \quad f_i^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}\ (i \in I)\rangle$$

のことである. ただし (これらの代数がもつタイプに属す) 任意の $k$ 項関数記号 $f$ および任意の $a_1, \cdots, a_k \in A$ と $b_1, \cdots, b_k \in B$ に対し $f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}$ は

$$f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}(\langle a_1, b_1\rangle, \cdots, \langle a_k, b_k\rangle) = \langle f^{\mathbf{A}}(a_1, \cdots, a_k), f^{\mathbf{B}}(b_1, \cdots, b_k)\rangle$$

により定義されるものとする.

直積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ のそれぞれの要素の第 $i$ 成分への写像 $\pi_i$ $(i = 1, 2)$ を,

---

12) $\mathbf{L}_3$ では $b \vee c = 1$, $b \wedge c = 0$ が成り立ちます.

13) ふたつの順序対 $\langle a, b\rangle$ と $\langle c, d\rangle$ が等しいのは $a = c$ かつ $b = d$ のときです.

$$\pi_1(\langle a,\, b\rangle) = a, \quad \pi_2(\langle a,\, b\rangle) = b$$

と定めると，$\pi_i$ は上への準同形写像になります．直積をとるという演算を繰り返し行うことにより，3 つの代数の直積，さらに一般に $n$ 個の代数の直積，を定義することができます．ただどのような順で直積をとるかにより，その要素の形が違うことに注意してください．たとえば，$\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ の直積の要素は $\langle a,\, \langle b,\, c\rangle\rangle$ $(a\in A,\ b\in B,\ c\in C)$ である一方，$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ の直積の要素は $\langle\langle a,\, b\rangle,\, c\rangle$ $(a\in A,\ b\in B,\ c\in C)$ となるからです．ところが $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ から $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ への写像 $\phi$ を

$$\phi(\langle a,\, \langle b,\, c\rangle\rangle) = \langle\langle a,\, b\rangle,\, c\rangle$$

と定めると，簡単に分かるように $\phi$ は同形写像になります．同じように直積 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ と直積 $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ も同形です．したがって与えられた 3 つの代数をどんな順に並べても，またどんな順に直積をとったとしても，結局は得られる代数は同形になります．ですから「同形である代数は同じものと考える」ことにすれば，3 つの代数の直積や $n$ 個の代数の直積などを曖昧さなく定義できることが分かります．

▶ **問題 4. 2. 27**　上に述べた直積の同形についての 2 つの結果を確かめよ．

以上のような考察から直積の概念を (無限個の代数の直積も含むように) 一般化します．$J$ を (添字の) 集合とし，また各々の $j$ $(\in J)$ に対して $A_j$ が集合であるとします (ただし $J$ もまたどの $A_j$ も空ではないとします)．これらの直積集合 $\prod_{j\in J} A_j$ の要素の 1 つを $a$ とすると，直観的には $a$ は各 $j$ に対してその第 $j$ 成分 $a(j)$ が $A_j$ の要素となる「もの」として定義すればいいのですが，数学の定義としてはこの「もの」が何であるかを明示する必要があり，次のようなやや直観的でない形になってしまいます．

**定義 4. 2. 28**

1. 各 $j$ $(\in J)$ に対し $A_j$ を集合とする．また $D$ をこれらの集合の和集合 $\bigcup_{j\in J} A_j$ とする．このとき $J$ から $D$ への写像 $a$ で各 $j$ に対して $a(j)\in A_j$ となるもの全体の集合を $\prod_{j\in J} A_j$ と表し，これを (集合 $J$ で添字づけられた集合のあつまり) $(A_j)_{j\in J}$ の**直積集合**という．
2. 次に，各 $j(\in J)$ に対し代数 $\mathbf{A_j} = \langle A_j,\, f_i{}^{\mathbf{A_j}}\ (i\in I)\rangle$ が与えられたとき，これら $(\mathbf{A_j})_{j\in J}$ の**直積** $\mathbf{C} = \prod_{j\in J}\mathbf{A_j}$ とは代数 $\langle\prod_{j\in J} A_j,\, f_i{}^{\mathbf{C}}\ (i\in I)\rangle$ のことである．
ただし (これらの代数がもつタイプに属す) 任意の $k$ 項関数記号 $f$ および任意の $a_1, \cdots, a_k \in \prod_{j\in J} A_j$ および任意の $j\in J$ に対し，$f^{\mathbf{C}}$ は
$$f^{\mathbf{C}}(a_1, \cdots, a_k)(j) = f^{\mathbf{A_j}}(a_1(j), \cdots, a_k(j))$$
により定義されるものとする．

添字集合 $J$ が $\{1, 2\}$ のとき，任意の $b \in A_1$, $c \in A_2$ に対して $a(1) = b$, $a(2) = c$ であるような写像 $a$ と順序対 $\langle b, c \rangle$ とは一対一に対応しますから，この場合には直積 $\prod_{j=1,2} \mathbf{A_j}$ と直積 $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}$ は同形です．つまり第二の直積の定義は第一の直積の定義を一般化したものなのです．

代数のクラス $\mathcal{K}$ に対し，$\mathcal{K}$ に属す代数の空でない集まり (1 つでもよい) の直積からなるような代数全体のクラスを $P(\mathcal{K})$ と表します．明らかに $\mathcal{K}$ は $P(\mathcal{K})$ に含まれます．

等式クラスが代数のどのようなクラスなのかを明らかにするのがこの節の目標でした．与えられた代数のクラス $\mathcal{K}$ に対して，これまでに導入された 3 つのクラス $S(\mathcal{K}), H(\mathcal{K}), P(\mathcal{K})$ は，等式の成立についてはどのような振る舞いを示すのでしょうか．

**定理 4.2.29** クラス $\mathcal{K}$ に属すすべての代数で成り立つ等式は，$S(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$, $P(\mathcal{K})$ のそれぞれに属すすべての代数で成り立ち，またその逆も成り立つ．

**証明** クラス $\mathcal{K}$ は $S(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$, $P(\mathcal{K})$ のどのクラスをとってもその部分クラスになっているので，逆は明らかです．ここでは，等式 $s \approx t$ がクラス $\mathcal{K}$ に属すすべての代数で成り立つと仮定して，$s \approx t$ がクラス $H(\mathcal{K})$ に属すすべての代数で成り立つことを示しましょう．等式 $s \approx t$ に現れる個体変数を $y_1, \cdots, y_n$ とします．さて，$\mathcal{K}$ に属す代数 $\mathbf{A}$ の準同形写像 $\phi$ による像 $\phi(\mathbf{A})$ について考えます．$\phi(A)$ の要素 $d_1, \cdots, d_n$ を任意にとると，ある $A$ の要素 $a_1, \cdots, a_n$ が存在して

$$d_i = \phi(a_i) \quad (1 \leq i \leq n)$$

と表せます．$\phi$ は準同形ですから ($s$ の構成に関する帰納法により)

$$\begin{aligned}([\overline{d_1}/y_1] \cdots [\overline{d_n}/y_n]s)^{\phi(\mathbf{A})} &= ([\overline{\phi(a_1)}/y_1] \cdots [\overline{\phi(a_n)}/y_n]s)^{\phi(\mathbf{A})} \\ &= \phi(([\overline{a_1}/y_1] \cdots [\overline{a_n}/y_n]s)^{\mathbf{A}}).\end{aligned}$$

同様に，

$$\begin{aligned}([\overline{d_1}/y_1] \cdots [\overline{d_n}/y_n]t)^{\phi(\mathbf{A})} &= ([\overline{\phi(a_1)}/y_1] \cdots [\overline{\phi(a_n)}/y_n]t)^{\phi(\mathbf{A})} \\ &= \phi(([\overline{a_1}/y_1] \cdots [\overline{a_n}/y_n]t)^{\mathbf{A}}).\end{aligned}$$

仮定より $\mathbf{A}$ で $s \approx t$ が成り立つから，

$$([\overline{a_1}/y_1] \cdots [\overline{a_n}/y_n]s)^{\mathbf{A}} = ([\overline{a_1}/y_1] \cdots [\overline{a_n}/y_n]t)^{\mathbf{A}}.$$

したがって

$$([\overline{d_1}/y_1] \cdots [\overline{d_n}/y_n]s)^{\phi(\mathbf{A})} = ([\overline{d_1}/y_1] \cdots [\overline{d_n}/y_n]t)^{\phi(\mathbf{A})}.$$

したがって等式 $s \approx t$ は代数 $\phi(\mathbf{A})$ で成り立ちます． □

▶ **問題 4.2.30**　定理 4.2.29 を，$S(\mathcal{K})$ と $P(\mathcal{K})$ の場合についても証明を与えよ．

さて，代数のクラス $\mathcal{K}$ が **variety** であるとは $\mathcal{K}$ が 3 つの演算 $S, H, P$ に関して閉じていることです．つまり $\mathcal{K}$ に属す代数の部分代数，準同形像，直積のどれについてもそれがすでに $\mathcal{K}$ に属しているようなクラスです．variety の集まりに対して，その共通部分をとると，それもまた 3 つの演算 $S, H, P$ に関して閉じています．したがって与えられた代数のクラス $\mathcal{K}$ に対して，それを含む最小の variety が存在することになります．それを $V(\mathcal{K})$ と表し，$\mathcal{K}$ から**生成される** variety とよびます．明らかに，$\mathcal{K}$ が variety である必要十分条件は

$$V(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$$

が成り立つことです．

それでは $\mathcal{K}$ から $V(\mathcal{K})$ をどのようにして求めたらいいのでしょうか．3 つの演算 $S, H, P$ に関して閉じていなければならないのですから，$\mathcal{K}$ から始めそれらの演算を次々に繰り返し行ってクラスを膨らませ，これ以上新たな代数が付け加わらなくなれば，それが $V(\mathcal{K})$ のはずです．ところが実際には $V(\mathcal{K})$ をもっと簡単に求めることができます．そのことを示すための準備として，まず次の結果を示します．

**定理 4.2.31**　代数の任意のクラス $\mathcal{K}$ に対し，

$$SH(\mathcal{K}) \subseteq HS(\mathcal{K}), \quad PS(\mathcal{K}) \subseteq SP(\mathcal{K}), \quad PH(\mathcal{K}) \subseteq HP(\mathcal{K})$$

が成り立つ[14]．

**証明**　ここでは $SH(\mathcal{K}) \subseteq HS(\mathcal{K})$ の証明を与えておきます．代数 $\mathbf{A}$ が $SH(\mathcal{K})$ に属すと仮定します．このことは $\mathcal{K}$ に属するある代数 $\mathbf{B}$ と $B$ を定義域とするある準同形写像 $\phi$ が存在し，$\mathbf{A}$ が $\phi(\mathbf{B})$ の部分代数になっていることを意味します．ここで $A$ の $\phi$ による逆像 $\phi^{-1}(A)(= \{c \in B : \phi(c) \in A\})$ を $C$，また任意の $k$ 項関数記号 $f$ および任意の $c_1, \cdots, c_k \in C$ に対し

$$f^{\mathbf{C}}(c_1, \cdots, c_k) = f^{\mathbf{B}}(c_1, \cdots, c_k)$$

として $f^{\mathbf{C}}$ を決めます．すると $\phi$ が準同形写像であることと，$\phi(c_1), \cdots, \phi(c_k) \in A$ で $\mathbf{A}$ が $\phi(\mathbf{B})$ の部分代数になっていることから

$$\begin{aligned}\phi(f^{\mathbf{C}}(c_1, \cdots, c_k)) = \phi(f^{\mathbf{B}}(c_1, \cdots, c_k)) &= f^{\phi(\mathbf{B})}(\phi(c_1), \cdots, \phi(c_k)) \\ &= f^{\mathbf{A}}(\phi(c_1), \cdots, \phi(c_k)) \in A\end{aligned}$$

となり，$f^{\mathbf{C}}(c_1, \cdots, c_k) \in C$，したがって $\mathbf{C}$ が $\mathbf{B}$ の部分代数になることが分かります．つまり $\mathbf{C}$ は $S(\mathcal{K})$ に属します．さらにこの式から，$\phi$ の定義域を集合 $C$ に制限した写像が $\mathbf{C}$

14) $SH(\mathcal{K})$ とは $S(H(\mathcal{K}))$，すなわち $\mathcal{K}$ に演算 $H$ を行い，次に $S$ を行って得られる代数のクラスです．ほかの定義も同様です．

から $\mathbf{A}$ の上への準同形写像になることも分かります．このようにして $\mathbf{A}$ が $HS(\mathcal{K})$ に属すことが証明できました． □

▶ **問題 4.2.32** 定理 4.2.31 の残り 2 つの包含関係の証明を与えよ．

**定理 4.2.33（タルスキ（Tarski）の定理）** 代数の任意のクラス $\mathcal{K}$ に対し，

$$V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$$

が成り立つ．

**証明** $V(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ を含む variety ですから，その定義より $\mathcal{K}$ に演算 $P$, $S$, $H$ を順次行って得られる代数のクラス $HSP(\mathcal{K})$ を含んでいます．したがって $HSP(\mathcal{K}) \subseteq V(\mathcal{K})$ です．次に $HSP(\mathcal{K})$ が variety になること，すなわち $H$, $S$, $P$ に関して閉じていることを示します．まず問題 4.2.25 の 2 の結果を使うと $H(HSP(\mathcal{K})) \subseteq HSP(\mathcal{K})$ です．$S$ については，定理 4.2.31 と問題 4.2.25 の 1 の結果より，$S(HSP(\mathcal{K})) \subseteq HSSP(\mathcal{K}) \subseteq HSP(\mathcal{K})$ が得られます．最後に $P$ については，定理 4.2.31 および「いくつかの直積の直積で得られるものは一回の直積で得られるものと同形になる」ことより，$P(HSP(\mathcal{K})) \subseteq HPSP(\mathcal{K}) \subseteq HSPP(\mathcal{K}) \subseteq HSIP(\mathcal{K}) \subseteq HSHP(\mathcal{K}) \subseteq HHSP(\mathcal{K}) \subseteq HSP(\mathcal{K})$ となります．したがって $HSP(\mathcal{K})$ は $\mathcal{K}$ を含む variety になるので，$V(\mathcal{K})$ の定義から $V(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$ が得られます． □

さて，$E$ を等式の集合とし，$\mathcal{M}_E$ を $E$ が成り立つような代数全体のクラスとすると，明らかに $\mathcal{M}_E$ は等式クラスです．またどんな等式クラスもある等式の集合 $E$ により $\mathcal{M}_E$ の形に表すことができます．ここで定理 4.2.29 を使うと，$V(\mathcal{M}_E)$ に属すどんな代数でも $E$ の等式が成り立つはずです．つまり

$$V(\mathcal{M}_E) = \mathcal{M}_E$$

です．このことから，どんな等式クラスも variety であることが分かります．証明は略しますが，この逆も成り立ち，次の重要な結果が得られます．

**定理 4.2.34（バーコフ（Birkhoff）の定理）** 代数のクラスが等式クラスのとき，そしてそのときに限り，そのクラスは variety である．

バーコフの定理より，代数のクラス $\mathcal{K}$ から生成される variety$V(\mathcal{K})$ は等式クラスになりますが，このクラスで成り立つのはどんな等式でしょうか．クラス $\mathcal{K}$ で成り立つ等式の集合を $E$ とすると，定理 4.2.29 より $V(\mathcal{K})$ で成り立つ等式の集合はちょうど $E$ になるはずです．つまり $V(\mathcal{K})$ は，$E$ が成り立つような代数全体のクラス $\mathcal{M}_E$ に一致するのです．

最後に，タルスキの定理やバーコフの定理からどのような結果が導かれるか，例をいくつ

か挙げておきましょう．

最初の例では，与えられた代数のクラスが等式クラスにはならないことを証明します．代数学で扱われる基本的な代数系の 1 つに**環** (かん) という概念があります．ここでは可換環を考えます．可換環では和 $+$ と積 $\cdot$ の 2 つの演算が定義され，$+$ についてはアーベル群，$\cdot$ については可換半群であり，さらに和の積に関する分配律，すなわち

$$x \cdot (y + z) \approx (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

を仮定します．明らかに可換環は等式クラスです．整数全体の集合とその和と積がつくる代数 $\mathbf{Z}$ は可換環の代表的な例です[15]．いま $m$ を 2 以上の整数とします．集合 $\{0, 1, \cdots, m-1\}$ をとり，その上の和 (および積) は「整数としての和 (および積) を求めそれを $m$ で割った剰余」として定めます．このようにして得られる代数 $\mathbf{Z}_m$ は $m$ を法とする**剰余環**とよばれる可換環です[16]．ここで $\mathbf{Z}$ から $\mathbf{Z}_m$ への写像 $\phi$ を，

$$\phi(n) = \text{「}n \text{ を } m \text{ で割った剰余」}$$

として定めると，$\phi$ は環としての準同形写像になります．次に，可換環でありさらに以下の性質をもつ代数系を**整域**といいます．

$$x \cdot y \approx 0 \text{ implies } x \approx 0 \text{ or } y \approx 0$$

明らかに $\mathbf{Z}$ は整域です．ところが $\mathbf{Z}_m$ は $m$ が素数でないときには整域ではありません．たとえば $m$ が 6 のとき $\mathbf{Z}_6$ で $2 \cdot 3 = 0$ ですが，2 も 3 も 0 に等しくないからです．つまり整域のクラスは準同形像に関して閉じていないのです．このことから整域が等式クラスではないこと，したがって上記の性質はどのようにしても等式だけでは表現できないことが分かります[17]．

クラス $\mathcal{K}$ がただ 1 つの代数 $\mathbf{A}$ からなる場合には，$V(\mathcal{K})$ の代わりに $V(\mathbf{A})$ と表します．さて，古典 (命題) 論理の完全性より，古典論理で証明可能な論理式の集合，トートロジーな論理式の集合，すべてのブール代数で恒真な論理式の集合の 3 つは同じものになります．代数化定理を経由してこの結果を等式についての結果に翻訳してみると，2 値のブール代数 $\mathbf{2}$ で成り立つ等式の集合と，すべてのブール代数で成り立つ等式の集合が等しいことが導かれます．ブール代数全体のクラスは等式クラスですから，これを $\mathcal{B}$ とすると，結局

$$V(\mathbf{2}) = \mathcal{B}$$

が得られます．そこでタルスキの定理を使えば

$$HSP(\mathbf{2}) = \mathcal{B}$$

15) 詳しい定義を知りたい人は代数学の標準的な教科書を参照してください．

16) たとえば $m$ が 7 のとき，$\mathbf{Z}_7$ 上の 4 と 5 の和と積はそれぞれ $2\,(= (4+5) - 7)$, $6\,(= (4 \times 5) - (7 \times 2))$ です．

17) 整域のクラスは直積に関しても閉じていません．このことから上記の性質は準等式でも表せないことが分かります．

となりますが，これは「任意のブール代数は 2 値のブール代数 $\mathbf{2}$ のある直積の部分代数の準同形像の形に表現できる」ことを表しています．このように普遍代数と代数化定理を媒介することによって，古典論理の代数的完全性とブール代数のある種の表現定理を結ぶことができるのです[18]．

定理 4.1.15 で直観主義 (命題) 論理の有限モデル特性を示しました．いま $\mathcal{H}$ をハイティング代数全体の variety とし，また $\mathcal{H}_{\mathsf{fin}}$ を有限なハイティング代数全体のクラスとすると，直観主義論理の有限モデル特性は

$$V(\mathcal{H}_{\mathsf{fin}}) = \mathcal{H}$$

と表すことができます．このように論理的性質と variety のもつ性質の間には密接な関係があります．

### 発展

順序や束などの代数構造についての入門書としては[5]，[15]があります．非標準論理の代数的方法による研究は現在急速に発展しています．とくに，このあとの 4.4 節で述べる部分構造論理の研究では代数的方法がきわめて有効に使われます．この節で紹介した代数的アプローチの解説は，4.4 節で展開される代数的方法の序論にもなっています．代数のクラスの振る舞いを調べるときには普遍代数の方法が基本的です．その標準的な教科書としては[3]があります．論理と代数を結ぶ議論では普遍代数と代数的論理学のいろいろな概念や成果がきわめて有効に使われます．とくに演繹定理の一般的な形についての議論や代数化定理は代数的論理学のもっとも基本的な概念です．

## 4.3. 様相論理

様相論理の研究はアリストテレスにまでさかのぼることができます．アリストテレスは，真である命題にも，論理的に真である命題のように「必然的に真」であるものや，事実としての真である命題のように「偶然的に真」であるものなど，いろいろな「様相」をもつ命題があると考え，そのような様相の論理的分析を試みたのです．

そのような考え方を数理論理学の立場から形式化を行ってみます．まず「必然性」を表すための様相論理記号として $\Box$ を導入します．つまり，$\Box\alpha$ は「$\alpha$ は必然的である」ことを表すのです．するとその否定 $\neg\Box\alpha$ は「$\alpha$ は必然的でない」こと，つまり「$\alpha$ は偶然的である」ことを表すことになります．他方，$\Box\neg\alpha$ は「$\alpha$ の否定が必然的である」ことを意味しますから，「$\alpha$ は不可能である」ことを表すことになります．するとその否定である $\neg\Box\neg\alpha$ は「$\alpha$ は可能である」ことを表すことになります．この $\neg\Box\neg\alpha$ はしばしば $\Diamond\alpha$ と省略されます．

新たな論理記号として $\Box$ を導入すると，論理式の定義も新たに「$\alpha$ が論理式ならば $\Box\alpha$ も

18) ブール代数の表現定理はもっと具体的な形で示すことができます．それによれば，「任意のブール代数はある集合ブール代数の部分代数に同形である」ことが証明されます．ここで集合ブール代数はつねに 2 値のブール代数のある直積と同形になることを注意しておきましょう．

論理式である」という項を付け加える必要があります．そのように定義を広げたとき，論理式の間の論理関係はどのように考えたらいいでしょうか．$\Box\alpha$ を「$\alpha$ は必然的である」と解釈する場合，$\Box\alpha \supset \alpha$ や $\alpha \supset \Diamond\alpha$ は正しい命題であると考えていいでしょう．しかし

$$\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha \quad (\text{「}\alpha\text{が必然的ならば，}\alpha\text{が必然的であることも必然的である」})$$

や

$$\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha \quad (\text{「}\alpha\text{が可能ならば，}\alpha\text{が可能であることも必然的である」})$$

が正しいかどうかを直観的な解釈だけで議論するのはむずかしく，もっと綿密な構文論と意味論からの研究が必要になります．それがこの節で述べる**様相論理**です．

また，様相論理を単に一項の論理記号 $\Box$ をもつ論理と見なすならば，「$\alpha$ は必然的である」という解釈以外にも，$\Box\alpha$ に対するいろいろな解釈が考えられそうです．実際，$\Box\alpha$ を「どんなときでも $\alpha$ である」とか「$\alpha$ であると信じられている」と解釈するときの $\Box$ の論理的な振る舞いは，それを「$\alpha$ は必然的である」と解釈した場合と多くの共通点があることは，ヨーロッパの中世の論理学者が気づいていました．これらの解釈をもとに様相論理のいくつかの発展形が考えられますが，それらのうちとくに応用面から注目されている時間論理と認識論理についても紹介したいと思います．

### 4.3.1　様相論理のいくつかの基本的体系

まず，いくつかの様相 (命題) 論理の基本的な体系を導入しましょう．言語としては $\mathcal{L}^*$ に様相論理記号 $\Box$ を付け加えた $\mathcal{L}^*(\Box)$ をとり，すでに述べたように，論理式の定義にはさらに「$\alpha$ が論理式ならば，$\Box\alpha$ も論理式である」という項を加えます．この節で扱う様相論理の体系はいずれも，古典命題論理の体系 HK に，$\Box$ に関するいくつかの公理型と $\Box$ に関する**必然化の規則 (the rule of neccesitation)** とよばれる推論規則

$$\frac{\alpha}{\Box\alpha}$$

を付け加えることにより定義されます．必然化の規則は，「証明可能な論理式は必然的である」ということを意味します．この体系での証明図は，HK の場合と同様に，上端がすべて公理であるような木状の図形とします．様相論理の体系が公理型

$$[\mathrm{K}]\ :\ \Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box\alpha \supset \Box\beta$$

を含むとき，その様相論理は**正規 (normal)** であるといいます．正規な様相論理では公理型 [K] に推論規則 MP を適用することにより，$\Box(\alpha \supset \beta)$ と $\Box\alpha$ から $\Box\beta$ を導くことができます．これは「必然的」な命題の間の MP が許されることを意味しています．

正規な様相論理のうちで最小のものは，HK に必然化の規則と公理型 [K] だけを付け加えた体系です．この体系を K とよびます．そうすると，正規な様相論理とは体系 K の拡張体系のことである，ということになります．これからは正規な様相論理だけを考えることにしましょう．

さて，定義 4.1.18 で与えた中間論理の定義と同様に，正規な様相論理を論理式の集合として定義すると，次のようになります．

**定義 4.3.1** 様相論理の論理式の集合 L が次の 3 つの条件を満たすとき，L を正規な様相論理という：

1. HK のすべての公理型と公理型 [K] の任意の代入例は L に属す，
2. L は MP と代入に関して閉じている，
3. L は必然化の規則に関して閉じている．すなわち，$\alpha \in L$ ならば $\Box\alpha \in L$.

正規な様相論理の体系のうちで代表的なものを次に紹介します．一般に様相論理 K に公理型 $[\mathsf{F}_1], \cdots, [\mathsf{F}_m]$ を付け加えて得られる体系を $\mathrm{KF}_1 \cdots \mathrm{F}_m$ と表すことにします．まず代表的な公理型をあげておきます (これらの公理型の名前の付けかたは奇妙に思われるかもしれませんが，慣習によるものです．また $\Diamond\alpha$ は $\neg\Box\neg\alpha$ の省略形であることを思い出してください).

$$
\begin{aligned}
[\mathsf{T}] &: \Box\alpha \supset \alpha \\
[4] &: \Box\alpha \supset \Box\Box\alpha \\
[\mathsf{B}] &: \alpha \supset \Box\Diamond\alpha \\
[5] &: \Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha
\end{aligned}
$$

公理型 [T] と [4] を仮定すると

$$\Box\alpha \leftrightarrow \Box\Box\alpha$$

が証明可能です．また [T] と [5] を仮定すると

$$\Diamond\alpha \leftrightarrow \Box\Diamond\alpha$$

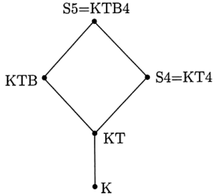
が証明可能になります．$\Box\alpha$ を「$\alpha$ は必然的である」と解釈すると，これらはそれぞれ「必然的に必然的である」ことは「必然的である」ことと一致し，また「必然的に可能である」ことは「可能である」ことと一致することを意味します．

上にあげた公理型はすべて $\beta \supset \gamma$ の形をしていますが，そのような場合にはこれらの公理型と同値な**双対**な形の公理型を与えることができます．そのことを [T] を例にとって説明します．まず [T] の中の $\alpha$ を $\neg\alpha$ で置き換えると $\Box\neg\alpha \supset \neg\alpha$ になります．次にこの論理式の対偶をとると $\neg\neg\alpha \supset \neg\Box\neg\alpha$ となり，さらに古典論理では $\alpha \supset \neg\neg\alpha$ が証明できますから，結局 $\alpha \supset \neg\Box\neg\alpha$，すなわち $\alpha \supset \Diamond\alpha$ が得られます．この形の論理式を [T] の双対な公理型といいます．逆に，この双対な公理型に対していまと同様な操作を行うと，もとの [T] が得られることが分かります．一般に $\beta \supset \gamma$ の形の論理式の双対を求めるのには，まず $\beta$ と $\gamma$ の位置を入れ替え，次にそれらに現れる $\Box$ を $\Diamond$ で $\Diamond$ を $\Box$ で置き換えればよいことが分かります．このようにすると [4], [B] および [5] の双対はそれぞれ次のようになります．

$$\Diamond\Diamond\alpha \supset \Diamond\alpha,\ \Diamond\Box\alpha \supset \alpha,\ \Diamond\Box\alpha \supset \Box\alpha.$$

▶ **問題 4. 3. 2**　このことを確かめよ．

様相論理の体系 KT4 と KT5 はそれぞれ S4, S5 という名前で知られています．KT5 は KTB4 と同値であることが知られているので，K, KT, KTB, S4, S5 の間の体系の強さは次の図のように表すことができます (この図は上にある論理のほうが下にあるものより真に強いことも示しています．これについては 4.3.2 節で触れます).




これらの基本的体系に対するゲンツェン流の体系について簡単に述べておきましょう．まず言語 $\mathcal{L}^*(\Box)$ に対する体系 LK をとります．さらに論理記号 $\Box$ に関する推論規則 $(\Box)$ を付け加えます．

$$\frac{\Gamma \to \alpha}{\Box\Gamma \to \Box\alpha}\ (\Box).$$

ただし，$\Gamma$ が $\beta_1, \cdots, \beta_m$ のとき，$\Box\Gamma$ は $\Box\beta_1, \cdots, \Box\beta_m$ を表すものとします．$\Box\Gamma$ が空のとき，つまり $\Gamma$ が空のときは推論規則 $(\Box)$ はちょうど必然化の規則に一致していることを注意しておきます．この体系を GK とよぶことにします．

> **定理 4. 3. 3**　任意の言語 $\mathcal{L}^*(\Box)$ の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が K で証明可能であることと $\alpha$ が GK で証明可能であることは同値である．

ここでさらに次の 3 つの推論規則を導入します．

$$\frac{\alpha, \Gamma \to \Delta}{\Box\alpha, \Gamma \to \Delta}\ (\Box \to)$$

$$\frac{\Box\Gamma \to \alpha}{\Box\Gamma \to \Box\alpha}\ (\to \Box 1) \qquad \frac{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \alpha}{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \Box\alpha}\ (\to \Box 2).$$

$(\to \Box 1)$ は $(\to \Box 2)$ の特別な場合と考えることができます．また $(\Box)$ は $(\Box \to)$ と $(\to \Box 1)$ から導かれます．体系 GK に推論規則 $(\Box \to)$ を加えた体系を GKT，LK に $(\Box \to)$ と $(\to \Box 1)$ を加えた体系を GS4，GS4 の $(\to \Box 1)$ の代わりにそれを強めた $(\to \Box 2)$ をとった体系を GS5

とします．すると定理 4.3.3 の意味での同値性が KT と GKT，S4 と GS4 および S5 と GS5 の間に成り立ちます．GK，GKT，GS4 に対しては基本定理を示すことができますが，GS5 では基本定理は成り立ちません．

▶ **問題 4. 3. 4**

1. $[\mathsf{K}^\dagger] : \Box(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\Box\alpha \wedge \Box\beta)$ は K で証明可能であることを示せ．
2. 逆に，必然化の規則と公理型 $[\mathsf{K}^\dagger]$ をもつ体系では [K] が証明可能になることを示せ．
3. [B] が KT5 で証明可能であることを示せ．
4. $\Diamond\Diamond\alpha \supset \Diamond\alpha$ および $\Diamond\alpha \supset \Box\Diamond\alpha$ (すなわち [5]) が KB4 で証明可能であることを示せ．

様相論理は必然化の規則をもつために，1 章で述べたような形の演繹定理は一般には成り立ちません．そのため 1 章で示した HK と LK の同等性の場合とは違って，$\Gamma \vdash_K \beta$ と推件式 $\Gamma \to \beta$ の GK での証明可能性の同等性を示すことはできません．しかし，正規な様相論理に対し次のような**局所演繹定理 (local deduction theorem)** が成り立ちます[19]．

**定理 4. 3. 5（様相論理の局所演繹定理）** $\Gamma$ を様相論理の論理式の集合，$\alpha$ と $\beta$ を様相論理の論理式とする．

1. 任意の正規な様相論理 $L$ において，$\alpha, \Gamma \vdash_L \beta$ となるのは，ある正整数 $n_1, \cdots, n_k$ に対し

$$\Gamma \vdash_L (\Box^{n_1}\alpha \wedge \cdots \wedge \Box^{n_k}\alpha \wedge \alpha) \supset \beta$$

となるとき，またそのときに限る．ただし $\Box^m$ は $m$ 個の $\Box$ の列を表す．

2. とくに $S4$ を含む任意の様相論理 $L$ において，$\alpha, \Gamma \vdash_L \beta$ となるのは，

$$\Gamma \vdash_L \Box\alpha \supset \beta$$

となるとき，またそのときに限る．

▶ **問題 4. 3. 6**

1. 定理 4.3.5 の証明を与えよ．
2. $K$ の局所演繹定理を使って，$K4$ と $KT$ のそれぞれに対する (局所) 演繹定理の形を簡単化してみよ．

### 4. 3. 2　クリプキによる様相論理の意味論

次に様相論理に対するクリプキの意味論について述べます．これは 1950 年代末に新たな様相論理に対する意味論としてクリプキが導入したものです．いくつかの関連する結果はす

19) 演繹定理において，結論の部分の条件の形が $\alpha, \beta$ に関係なく決まるのではなく，それらに依存して正整数を選ぶ必要があるために「局所」演繹定理とよばれます．

でに知られていましたが，様相論理の意味論という立場から明確な形で理論を展開したのはクリプキです．この意味論はその直観的な理解のしやすさと数学的な扱いやすさから，様相論理に限らず，他の多くの非標準論理のその後の意味論研究に非常に大きな影響を与えました．この本ではすでに直観主義論理に対するクリプキの意味論を説明しましたが，歴史的にはまず様相論理に対する意味論がクリプキにより導入され，そののち直観主義論理に対する意味論が導入されました．後者の導入の際にヒントになったのが 4.3.4 節で述べる様相論理 S4 と直観主義論理の対応関係です．

この 4.3 節では，クリプキ構造といえば，これから定義する様相論理のクリプキ構造を指します．様相論理の**クリプキ構造** $\langle S, R\rangle$ は空でない集合 $S$ と $S$ 上の 2 項関係 $R$ からなります．直観主義論理のクリプキ構造の場合と同様に，$S$ の要素を可能な世界，関係 $R$ を到達可能関係とよぶことがあります．クリプキ構造 $\langle S, R\rangle$ 上の**付値**とは，命題変数全体の集合から $S$ の部分集合全体の集合への写像のことです[20]．任意の付値 $k$ に対し，さらに $k(\bot)=\emptyset$ と定めておきます．クリプキ構造 $\langle S, R\rangle$ 上の付値 $k$ に対し，$S$ の要素と論理式との間の関係 $\models$ を次の 1 から 5 により帰納的に定義します[21]．ただし $a$ は $S$ の任意の要素とし，また $a\models\alpha$ でないことを $a\not\models\alpha$ と表すことにします．

1. $\alpha$ が命題変数 または $\bot$ のとき，$a\models\alpha \iff a\in k(\alpha)$,
2. $a\models\alpha\supset\beta \iff a\not\models\alpha$ または $a\models\beta$,
3. $a\models\alpha\land\beta \iff a\models\alpha$ かつ $a\models\beta$,
4. $a\models\alpha\lor\beta \iff a\models\alpha$ または $a\models\beta$,
5. $a\models\Box\alpha \iff aRb$ であるようなすべての $b$ に対し $b\models\alpha$.

$\neg\alpha$ は $\alpha\supset\bot$ により定義されているので

$$a\models\neg\alpha \iff a\not\models\alpha$$

です．したがって $\Diamond\alpha(=\neg\Box\neg\alpha)$ は

$$a\models\Diamond\alpha \iff aRb \text{ であるようなある } b \text{ に対し } a\models\alpha$$

となります．直観的な言い方をすると，可能世界 $a$ で $\Box\alpha$ が成り立つとは，「$a$ から到達可能などんな世界 $b$ でも $\alpha$ が成り立つ」ことですし，また $a$ で $\Diamond\alpha$ が成り立つとは，「$a$ から到達可能なある世界 $b$ で $\alpha$ が成り立つ」ことであると解釈するのです．

このように定義された関係 $\models$ は付値 $h$ から一意的に定まるので，直観主義論理のクリプキ構造の場合と同様に $\models$ と $h$ とを同一視し，$\models$ のことも付値とよぶことにします．またクリプキ構造 $\langle S, R\rangle$ とその上の付値 $\models$ からなる三つ組 $\langle S, R, \models\rangle$ を**クリプキ・モデル**といいます．クリプキ・モデル $\langle S, R, \models\rangle$ において，$S$ のすべての要素 $a$ に対し $a\models\alpha$ となるとき，

20) 直観主義論理のクリプキ構造の場合には，付値が命題変数全体の集合から $S$ の「遺伝的」部分集合全体の集合への写像でした．この違いに注意してください．

21) ここでも $\alpha\supset\beta$ の場合の $\models$ の定義が直観主義論理の場合と違っていることに注意してください．

論理式 $\alpha$ は $\langle S, R, \models\rangle$ で真であるといいます．クリプキ構造 $\langle S, R\rangle$ 上の任意の付値 $\models$ に対し，$\alpha$ が $\langle S, R, \models\rangle$ で真のとき，$\alpha$ は $\langle S, R\rangle$ で恒真であるといいます．

与えられたクリプキ・モデル $\langle S, R, \models\rangle$ において，$S$ の要素 $a$ を 1 つ定め，

命題変数 $p$ に対し，$a \models p$ ならば $f(p) = \top$，　$a \not\models p$ ならば $f(p) = \bot$

により写像 $f$ を定めると，$f$ は古典論理の付値になります．いま $\alpha$ が $\Box$ を 1 つも含まない論理式ならば

$$f(\alpha) = \top \;\Leftrightarrow\; a \models \alpha$$

となることを帰納法により示すことができます．逆に古典論理の付値 $f$ が与えられたとき，上の関係が成り立つように付値 $\models$ を定めることもできます．したがって $\Box$ を 1 つも含まない論理式 $\alpha$ については，$\alpha$ がトートロジーになることと $\alpha$ が与えられたクリプキ構造で恒真になることとは同値であることが分かります．

**補助定理 4.3.7**　論理式 $\alpha$ が K で証明可能ならば，$\alpha$ は任意のクリプキ・モデルで真である．

**証明**　クリプキ・モデル $\langle S, R, \models\rangle$ を任意にとります．このクリプキ・モデルで古典論理の公理が真になることは明らかです．MP の場合，$\alpha \supset \beta$ と $\alpha$ が真なら $\beta$ が真になることを示せばよいのですが，これも明らかです．次に [K] の代入例の 1 つである $\Box(\alpha \supset \beta) \supset \Box\alpha \supset \Box\beta$ について考えてみます．任意に $a(\in S)$ をとり，$a \models \Box(\alpha \supset \beta)$ および $a \models \Box\alpha$ を仮定します．このとき $a \models \Box\beta$ を示しましょう．ここで $aRb$ となる $b$ を任意にとると，仮定から $b \models \alpha \supset \beta$ かつ $b \models \alpha$ が得られます．したがって，$b \models \beta$ です．つまり，$aRb$ となるすべての $b$ に対し $b \models \beta$ ですから，求める結果である $a \models \Box\beta$ が得られました．最後に，必然化の規則について考えます．論理式 $\alpha$ が真であることを仮定して，$\Box\alpha$ も真になることを示せば十分です．$\alpha$ が真であれば，$S$ の任意の要素 $d$ に対して $d \models \alpha$ です．いま $a(\in S)$ を任意にとり，さらに $aRb$ とします．明らかに $b \models \alpha$ ですから，したがって $a \models \Box\alpha$ が成り立ちます．　□

この定理を使うと，たとえば公理型 [4] の代入例 $\Box p \supset \Box\Box p$ が K では証明可能でないことを次のように示すことができます．集合 $S$ を $\{a, b, c\}$ とし，$S$ 上の関係 $R$ が成り立つのは $aRb$ と $bRc$ だけとしておきます．付値 $\models$ を

$$x \models p \;\Leftrightarrow\; x = b$$

により定めます．このとき $a \models \Box p$ です．他方 $c \not\models p$ より $b \not\models \Box p$，したがって $a \not\models \Box\Box p$ です．つまり $a \not\models \Box p \supset \Box\Box p$ ですから，定理 4.3.7 より $\Box p \supset \Box\Box p$ は K で証明可能でないことが示されました．

▶ **問題 4.3.8**　[B] の代入例 $q \supset \Box\Diamond q$ が K で証明可能でないことを示せ．

ここで具体的なクリプキ構造をいくつかとりあげてみましょう．まず $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とします．このとき $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ および $\langle \mathbb{Z}, = \rangle$ はどれもクリプキ構造です．[T] は $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ で恒真です．実際，$m \in \mathbb{Z}$ で $m \models \Box\alpha$ とすると，$m \leq n$ であるすべての $n$ で $n \models \alpha$ ですから，とくに $n$ として $m$ をとれば $m \models \alpha$ が得られます．

▶ **問題 4.3.9**　[T] は $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ で偽になることを確かめよ．

クリプキ構造 $\langle \mathbb{Z}, = \rangle$ では [B] が恒真になることは容易に確かめられます．他方，$\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ では [B] の代入例である $p \supset \Box\Diamond p$ は偽になります．たとえば付値 $\models$ を $0 \models p$，かつ $n \neq 0$ ならば $n \not\models p$ と定めます．すると $0 \models p$ ですが，$0 \leq 1$ かつ $1 \not\models \Diamond p$ ですから $0 \not\models \Box\Diamond p$ となるのです．

[4] はクリプキ構造 $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, = \rangle$ のどれにおいても恒真です．

▶ **問題 4.3.10**

1. $\mathbb{Z}$ 上の 2 項関係 $P$ を「$xPy \iff x \times y$ は奇数である」として定めると，[B] はクリプキ構造 $\langle \mathbb{Z}, P \rangle$ で恒真になることを示せ．
2. $\mathbb{Z}$ 上の 2 項関係 $Q$ を「$xQy \iff y = x + 1$」と定めると，[4] はクリプキ構造 $\langle \mathbb{Z}, Q \rangle$ で偽になること示せ．

**定義 4.3.11**　$R$ を集合 $S$ 上の 2 項関係とする．このとき

1. $R$ が反射的 **(reflexive)** $\Leftrightarrow$ すべての $x \in S$ に対し $xRx$,
2. $R$ が対称的 **(symmetric)** $\Leftrightarrow$ すべての $x, y \in S$ に対し，$xRy$ ならば $yRx$,
3. $R$ が推移的 **(transitive)** $\Leftrightarrow$ すべての $x, y, z \in S$ に対し，$xRy$ と $yRz$ が成り立つならば $xRz$,
4. $R$ がユークリッド的 **(Euclidean)** $\Leftrightarrow$ すべての $x, y, z \in S$ に対し，$xRy$ と $xRz$ が成り立つならば $yRz$

と定める．とくに反射的，対称的，推移的の 3 つの性質をもつ関係を**同値関係 (equivalence relation)** という．

▶ **問題 4.3.12**

1. $R$ が対称的かつ推移的ならば，$R$ はユークリッド的であることを示せ．
2. $R$ が反射的の場合にはこの逆も成り立つこと，すなわち $R$ がユークリッド的かつ反射的ならば，$R$ が対称的かつ推移的となることを示せ．

**補助定理 4.3.13**　$\langle S, R \rangle$ をクリプキ構造とすると，次のことが成り立つ：

1. $R$ が反射的 $\Leftrightarrow$ [T] の代入例はすべて $\langle S, R \rangle$ で恒真,
2. $R$ が対称的 $\Leftrightarrow$ [B] の代入例はすべて $\langle S, R \rangle$ で恒真,
3. $R$ が推移的 $\Leftrightarrow$ [4] の代入例はすべて $\langle S, R \rangle$ で恒真,

4. $R$ がユークリッド的 $\Leftrightarrow$ [5] の代入例はすべて $\langle S, R\rangle$ で恒真.

**証明**　ここでは 3 についての証明を与えておきましょう．まず $R$ が推移的であると仮定します．[4] の代入例 $\Box\alpha \supset \Box\Box\alpha$ において，$a \models \Box\alpha$ とします．いま $aRb$ となる任意の $b$ をとります．さらに $bRc$ となる任意の $c$ をとると，$R$ の推移性から $aRc$ です．すると仮定より $c \models \alpha$ です．したがって $b \models \Box\alpha$ が $aRb$ となる任意の $b$ について成り立つことになり，求める結果 $a \models \Box\Box\alpha$ が得られます．

逆に $R$ が推移的でないと仮定しましょう．そうすると $aRb$ かつ $bRc$ だが $aRc$ が成り立たないような $a, b, c\ (\in S)$ が存在するはずです．ここで命題変数 $p$ に対する付値 $\models$ を

$$x \models p \ \Leftrightarrow \ aRx$$

により定めます．このとき $aRd$ ならば $d \models p$ ですから $a \models \Box p$ です．他方 $c \not\models p$ ですから $b \not\models \Box p$，したがって $a \not\models \Box\Box p$ です．つまり [T] の代入例 $\Box p \supset \Box\Box p$ が $\langle S, R\rangle$ で恒真でないことが示されました．□

▶ **問題 4. 3. 14**　補助定理 4.3.13 の 1, 2 と 4 についてその証明を与えよ．

補助定理 4.3.13 の結果は，2 項関係の性質と様相論理の公理型の間に密接な関係があることを示しています．

▶ **問題 4. 3. 15**

1. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする．公理型 $\Box\Box\alpha \supset \Box\alpha$ はクリプキ構造 $\langle \mathbb{R}, <\rangle$ で恒真だが，$\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ では偽になることを示せ．
2. この公理型は 2 項関係のどのような性質を表しているか．

$\langle S, R\rangle$ をクリプキ構造とします．$R$ が反射的なら $\langle S, R\rangle$ を **KT 構造**，$R$ が反射的かつ対称的なら $\langle S, R\rangle$ を **KTB 構造**，$R$ が反射的かつ推移的なら $\langle S, R\rangle$ を **S4 構造**，そして $R$ が同値関係なら $\langle S, R\rangle$ を **S5 構造**といいます．

**定理 4. 3. 16**

1. 論理式 $\alpha$ が K で証明可能となるための必要十分条件は，$\alpha$ が任意のクリプキ構造で恒真となることである．
2. L を KT, KTB, S4, S5 のどれかであるとする．このとき，$\alpha$ が L で証明可能となるための必要十分条件は，$\alpha$ が任意の L 構造で恒真となることである．

この定理において，論理の健全性は補助定理 4.3.7 および 4.3.13 から容易に導かれます．完全性の証明はここでは行いません．なお，これらの基本的な 5 つの様相論理はすべて有限モデル特性をもちます．すなわち定理 4.3.16 で「任意のクリプキ構造 (または L 構造) で恒真」というところを「任意の有限クリプキ構造 (または有限 L 構造) で恒真」という形に強め

ることができるのです．クリプキ完全でない中間命題論理が存在することを前節で述べましたが，様相論理についても同様にクリプキ完全でないものが存在します．

### 4.3.3　様相代数

様相論理の代数的な意味論について簡単に触れておきましょう．様相論理は古典論理に様相に関する論理記号 □ についての必然化の規則と公理型により定められますから，様相論理に対応する代数構造はブール代数 **B** とその上の単項演算 □ の組 $\langle \mathbf{B}, \Box \rangle$ からなります[22]．

論理での証明可能性は代数での恒真性，つまりどんな付値に対しても 1 という値をとること，として表されます．したがって必然化の規則は代数においては「□ に 1 を与えると 1 である」こと，つまり

$$\Box 1 \approx 1$$

と表現できます．また問題 4.3.4 の結果を使うと公理型 [K] は，等式により

$$\Box(x \wedge y) \approx \Box x \wedge \Box y$$

と表されます．そこでブール代数 **B** とその上の単項演算 □ の組 $\langle \mathbf{B}, \Box \rangle$ が上の 2 つの等式を満たすとき，$\langle \mathbf{B}, \Box \rangle$ を**様相代数 (modal algebra)** といいます．つまり，様相代数は様相論理 K の代数構造を与える等式クラスなのです．

他の様相論理についてもこのようなやり方で，対応する代数構造を定義することができます．たとえば，[T], [4], [B], [5] のそれぞれの公理型に対して，□ についての次の代数的な不等式

$$\Box x \leq x, \quad \Box x \leq \Box\Box x, \quad x \leq \Box\Diamond x, \quad \Diamond x \leq \Box\Diamond x$$

のうちのいくつかをとることにより，KT 代数，S4 代数 (KT4 代数)，KTB 代数，S5 代数 (KT5 代数) などの様相代数の部分クラスを定義することができます．明らかにこれらはすべて等式クラスです．ただし，$\Diamond x$ は $\neg\Box\neg x$ により定義される代数演算です．

たとえば **B** を 4 点 $\{0, a, b, 1\}$ からなるブール代数 (ただし $\neg a = b$, $\neg b = a$) とし，また □ を

$$\Box 0 = \Box b = 0, \quad \Box a = a, \quad \Box 1 = 1$$

と定めると $\langle \mathbf{B}, \Box \rangle$ は S4 代数になります．この代数では，$\Diamond b = b$ ですが $\Box\Diamond b = 0$ なので，[5] に対応する条件

$$\Diamond b \leq \Box\Diamond b$$

が満たされず，したがって S5 代数ではありません[23]．

直観主義論理のハイティング代数に関する完全性の証明のところでリンデンバウム代数に

22) 論理記号 ∧, ∨, ¬ とそれらに対応する代数演算は同じ記号を使っていました．同じようにここでも様相演算 □ とそれに対応する代数演算は同じ記号を使います．

23) この例について $\langle \mathbf{B}, \Box \rangle$ は S4 代数になることを確かめてみてください．そうすると，クリプキの意味論にくらべて代数的意味論がはるかに扱いが面倒なことが実感できると思います．

触れました．同様な考え方を使うことにより，様相論理の様相代数に関する健全性と完全性を示すことができます．

> **定理 4. 3. 17（様相論理 K の代数的意味論に関する健全性と完全性）** 論理式 $\alpha$ が様相論理 K で証明可能となるための必要十分条件は，$\alpha$ が任意の様相代数で恒真となることである．

同様にして，L を KT, KTB, S4, S5 のどれかとすると，$\alpha$ が L で証明可能となるための必要十分条件は，$\alpha$ が任意の L 代数で恒真となることが証明できます．

$\langle S, R\rangle$ を様相論理のクリプキ構造とします．以前に述べたように，$S$ のべき集合はブール代数となるので，これを $\mathbf{P_S}$ と表しましょう．次に $\mathbf{P_S}$ 上の単項演算 □ を次のように定めます．$S$ の任意の部分集合 $W$ に対し

$$\Box W = \{x \in S \mid xRy \text{ であるようなすべての } y \text{ に対し } y \in W\}.$$

すると $\langle \mathbf{P_S}, \Box\rangle$ は様相代数になります．

▶ **問題 4. 3. 18** このことを確かめよ．

さらに次のことが成り立ちます．

> 任意の様相論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ がクリプキ構造 $\langle S, R\rangle$ で恒真であることと $\alpha$ が様相代数 $\langle \mathbf{P_S}, \Box\rangle$ で恒真であることとは同値である

つまり，前節の最後に述べた直観主義論理のクリプキ構造とハイティング代数の間の関係と同様なことが，様相論理のクリプキ構造と様相代数の間にも成り立つのです．

▶ **問題 4. 3. 19** クリプキ構造 $\langle S, R\rangle$ において $R$ が反射的のとき，様相代数 $\langle \mathbf{P_S}, \Box\rangle$ において

$$\Box x \leq x$$

が成り立つことを確かめよ．また，$R$ が推移的のときには，$\langle \mathbf{P_S}, \Box\rangle$ において

$$\Box x \leq \Box\Box x$$

が成り立つことを確かめよ．

### 4. 3. 4 中間論理と様相論理の対応関係

直観主義論理のクリプキ構造は空でない順序集合のことでした．ここで $\langle S, \leq\rangle$ を直観主義論理のクリプキ構造とすると，順序 $\leq$ は反射的で推移的ですから，様相論理のクリプキ構造と見ると S4 構造になります．もちろん直観主義論理のクリプキ・モデルの場合には付値の値は遺伝的集合でなければなりませんし，また $\alpha \supset \beta$ に対する関係 $\models$ の決め方も直観主義論理の場合と様相論理の場合では違っています．ただ $\langle S, \leq\rangle$ を S4 構造として見る場合，任意

の $\models$ および任意の論理式 $\gamma$ に対して集合 $U = \{z \in S \mid z \models \Box\gamma\}$ は

$$x \in U \text{ で } x \leq y \text{ であるならば } y \in U$$

という「遺伝的」に相当する性質をもつことが分かります．さらに $\gamma$ が $\alpha \supset \beta$ の形のときには様相論理のクリプキ・モデルとしての $\Box(\alpha \supset \beta)$ の値の決め方と，直観主義論理のクリプキ・モデルとしての $\alpha \supset \beta$ の値の決め方が一致することが分かります．

これらのことは，直観主義命題論理と様相論理 S4 の間の密接な関係を示唆しています．以下に示すように，この関係は中間論理全体のクラスと S4 を含む様相論理全体のクラスの間の一般的な関係にまで拡張することができるのです．その関係を表すために，次のように変換 $T$ を定義します．この変換をゲーデル (**Gödel**) の変換またはマッキンゼイ・タルスキ (**McKinsey-Tarski**) の変換といいます．以下では，様相記号 $\Box$ を含まない直観主義命題論理の論理式のことを単に $\mathcal{L}^*$ の論理式とよぶことにします．

**定義 4.3.20**　$\mathcal{L}^*$ の任意の論理式 $\alpha$ に様相論理の論理式 $T(\alpha)$ を対応させる変換 $T$ を，次のように帰納的に定義する：

1. $T(\alpha) = \Box\alpha$，ただし $\alpha$ が命題変数または $\bot$ のとき，
2. $T(\alpha \wedge \beta) = T(\alpha) \wedge T(\beta)$,
3. $T(\alpha \vee \beta) = T(\alpha) \vee T(\beta)$,
4. $T(\alpha \supset \beta) = \Box(T(\alpha) \supset T(\beta))$.

**定理 4.3.21**　$\alpha$ を $\mathcal{L}^*$ の任意の論理式とする．このとき次の 2 つの条件は同値である：

1. $\alpha$ が HJ で証明可能である，
2. $T(\alpha)$ が S4 で証明可能である．

**証明**　まず，この節の始めに述べたことを使って 2 から 1 が導かれることを示しましょう．対偶をとり，$\alpha$ が HJ で証明可能でないと仮定します．定理 4.1.14 のクリプキ構造に関する HJ の完全性により，直観主義論理のクリプキ・モデル $\langle S, \leq, \models \rangle$ および $S$ の要素 $c$ が存在して，$c \not\models \alpha$ が成り立ちます．ところで，上で述べたように $\langle S, \leq \rangle$ は S4 構造と見なすことができます．そこでこの S4 構造上の付値 $\models^*$ を

$$x \models^* p \;\Leftrightarrow\; x \models p \quad (x \in S,\ p \text{ は命題変数})$$

により定めます．すると論理式の長さに関する帰納法を使うことにより，任意の $x \in S$ および $\mathcal{L}^*$ の任意の論理式 $\beta$ に対し

$$x \models^* T(\beta) \;\Leftrightarrow\; x \models \beta$$

が成り立つことが示されます．とくに $x$ として $c$, $\beta$ として $\alpha$ をとれば $c \not\models \alpha$ より $c \not\models T(\alpha)$.

したがって定理 4.3.16 の S4 の健全性より，$T(\alpha)$ は S4 で証明可能ではないことが分かります．

1 から 2 を導くのは $\alpha$ に至る HJ の証明図の長さに関する帰納法を用います．たとえば $\alpha$ が HJ で論理式 $\gamma \supset \alpha$ と $\gamma$ とから MP により導かれた場合について考えてみましょう．まず，帰納法の仮定から $T(\gamma \supset \alpha)$，すなわち $\Box(T(\gamma) \supset T(\alpha))$ と $T(\gamma)$ の両方が S4 で証明可能です．論理式

$$\Box(T(\gamma) \supset T(\alpha)) \supset T(\gamma) \supset T(\alpha)$$

は [T] の代入例で，これと $\Box(T(\gamma) \supset T(\alpha))$ に対し MP を適用すれば，$T(\gamma) \supset T(\alpha)$ が得られます．そこでこの論理式と $T(\gamma)$ に対し再び MP を適用すれば，$T(\alpha)$ が導かれます． □

体系 HJ に対し定理 4.3.21 が成り立つ様相論理は S4 だけとは限りません．S4 に公理型

$$[\mathsf{Grz}] : \Box(\Box(\alpha \supset \Box\alpha) \supset \alpha) \supset \alpha$$

を付け加えた体系を S4Grz とすると，次の結果が得られます[24]．

**定理 4.3.22** M を正規な様相論理とする．$\mathcal{L}^*$ の任意の論理式 $\alpha$ に対し

$$\vdash_{HJ} \alpha \ \Leftrightarrow\ T(\alpha) \in M$$

が成り立つための必要十分条件は (論理を証明可能な論理式の集合と見れば)

$$S4 \subseteq M \subseteq S4Grz$$

が成り立つことである．

つまり，HJ に対し変換 T によって定理 1.3.9 に示されるような関係が成り立つ様相論理のうち，最小のものが S4 で，最大のものが S4Grz なのです．この結果はさらに次のように一般化されます．まず中間論理 L は HJ に公理型 $\{\delta_i | i \in I\}$ (無限でもよい) を付け加えた体系とします．このとき，L に公理型 $\{T(\delta_i) \mid i \in I\}$ を付け加えた体系が定める論理を $\tau(L)$ と表します (L の公理型の選び方に依存せずに $\tau(L)$ が定まることを証明することができます)．また $\tau(L)$ にさらに [Grz] を付け加えた体系を $\sigma(L)$ と表します．たとえば $\tau(\mathrm{HK}) = S5$ となります．

**定理 4.3.23** L を任意の中間論理とする．正規な様相論理 M に対し

$$\alpha \in L \ \Leftrightarrow\ T(\alpha) \in M \tag{4.3}$$

がすべての $\mathcal{L}^*$ の論理式 $\alpha$ について成り立つための必要十分条件は，

24) Grz はポーランドの論理学者 A.Grzegorczyk にちなんで付けられました．

$$\tau(L) \subseteq M \subseteq \sigma(L)$$

が成り立つことである．

定理 4.3.23 の (4.3) がすべての $\alpha$ に対して成り立つとき，M は L の (1 つの) **同伴様相論理** (modal companion) とよばれます．様相論理 M が S4 と S5(S5 に [Grz] を付け加えた体系としてもよい) の間にあるとき，論理式の集合 $\{\alpha \mid T(\alpha) \in M\}$ を L とすると，L は中間論理になり，またさらに M は L の同伴様相論理になることを示すことができます．

$\tau$ は中間論理 L に対しその最小の同伴様相論理を一対一に対応させる写像になっています．したがって前節の中間論理についての結果から，S4 を含む様相論理も非可算存在することになります．その上，$\tau$ と $\sigma$ は中間論理のもつ性質のうち，決定可能性，有限モデル特性，論理和分離性などを保つ写像です (たとえば，$\tau$ が決定可能性を保つとは，中間論理 L が決定可能ならば $\tau(L)$ も決定可能であることを意味します)．また，$\tau$ はクリプキ完全性を保つが，$\sigma$ はそれを一般には保たないことなどが知られています．

### 4.3.5　時間論理と認識論理

4.3 節の始めに述べたように，単項演算をもつ論理の中には様相論理と類似の性質をもつものがいろいろあります．ここではその中から代表的な 2 つ論理，すなわち**時間論理** (**tense logic** または **temporal logic**) と**認識論理** (**epistemic logic**) を紹介します．前者の場合，$\Box\alpha$ を「(時間的な意味で) いつも $\alpha$」と解釈し，また後者の場合には「$\alpha$ を知っている (または，信じている)」と解釈します．

#### (1)　時間論理

時間論理の研究はもともと (英語の) 文がもっている過去，現在，未来，現在完了，過去完了などの時制を論理的に解析することから始められました．そのため以前は時制論理 (tense logic) とよばれていました．最近では時間的推移を伴う論証や計算過程の時間的前後関係の記述など，その研究範囲も広がってきています．とくに計算機科学においては並列プログラムの仕様の記述と検証，モデル検査などにおける基礎理論になっています．

時間論理では $\Box\alpha$ は「いつも $\alpha$」と解釈されますが，時間の前後関係を記述するためには「過去においていつも $\alpha$」と「未来においていつも $\alpha$」の 2 つに分離しておく必要があります．これらを表すために $[P]$ と $[F]$ の 2 つの論理記号を導入します．このとき $\Box\alpha$ は

$$[P]\alpha \wedge \alpha \wedge [F]\alpha,$$

つまり過去も現在も未来もつねに $\alpha$，の省略形と考えることができます．論理記号 $[P]$ と $[F]$ が満たすべき公理型は時間の構造をどのように考えるかに依存します．

一般に時間は順序集合としての構造をもつと考えられます．そこで，$S$ を時点全体の集合，$\leq$ を $S$ 上の時間の前後関係を定める順序とします．さらに $x < y$ を「$x \leq y$ かつ $x \neq y$」の

省略形とします．関係 $<$ は推移的だが反射的ではありません．ここで「時点 $a$ で $\alpha$ が成り立つ」ことを

$$a \models \alpha$$

と表してみます．すると $[P]$ と $[F]$ に対し次のように解釈を与えるのが妥当と考えられます．

$$a \models [P]\alpha \;\Leftrightarrow\; a > b \text{ であるようなすべての } b \text{ に対し } b \models \alpha,$$

$$a \models [F]\alpha \;\Leftrightarrow\; a < b \text{ であるようなすべての } b \text{ に対し } b \models \alpha.$$

これらの関係は様相論理のクリプキ構造 $(S, >)$ (または $(S, <)$) における様相記号 $\Box$ に対する付値の定義 (3.3.2 節) に一致します．さらに関係 $>$ (または $<$) は推移的であることが要請されますから，$[P]$ と $[F]$ についてはまず公理型 [K] と [4] に対応する次の公理型を仮定することになります．

$$\begin{aligned}
&[\mathsf{KP}] : [P](\alpha \supset \beta) \supset ([P]\alpha \supset [P]\beta)\\
&[\mathsf{KF}] : [F](\alpha \supset \beta) \supset ([F]\alpha \supset [F]\beta)\\
&[\mathsf{4P}] : [P]\alpha \supset [P][P]\alpha\\
&[\mathsf{4F}] : [F]\alpha \supset [F][F]\alpha
\end{aligned}$$

しかし，これだけの公理では過去と未来の関係，つまり $>$ が $<$ の逆関係になっていること，を反映することができません．そこでさらに「現在は過去のある未来であり，また未来のある過去である」ことを表す次の 2 つの公理型を追加する必要があります．

$$\begin{aligned}
&[\mathsf{PF}] : \alpha \supset [P]\langle F\rangle\alpha\\
&[\mathsf{FP}] : \alpha \supset [F]\langle P\rangle\alpha
\end{aligned}$$

ここで $\langle F\rangle\alpha$ および $\langle P\rangle\alpha$ は $\neg[P]\neg\alpha$ および $\neg[P]\neg\alpha$ の省略形とします．内容的にはそれぞれ「未来のある時点で $\alpha$」,「過去のある時点で $\alpha$」を表しています．HK に以上の 6 つの公理型および $[P]$ と $[F]$ のそれぞれに対する必然化の規則を付け加えて得られる体系が時間論理の基本的な体系になります．この体系を $K_t$ といいます．

一般の時間論理は $K_t$ の拡張体系として定義されます．時間の構造は線形 (つまり全順序) なのか枝分かれしているのか，また離散的なのか連続的なのかなど，記述する対象や目的に応じていろいろな要請が考えられます．それによってその要請を表す公理型が必要になります．たとえば線形な時間論理の場合には次の 2 つの公理型を採ります．

$$\begin{aligned}
&[\mathsf{Lin1}] : \Box\alpha \supset [P][F]\alpha\\
&[\mathsf{Lin2}] : \Box\alpha \supset [F][P]\alpha
\end{aligned}$$

また，表現能力を強めるために新しく論理記号を導入する場合もあります．たとえばプログラムの仕様の記述のために until を表す論理記号 $U$ が導入されます．ここで $\alpha U \beta$ ($\alpha$ until $\beta$) は「いつか $\beta$ が成り立ち，それまではつねに $\alpha$」を意味します．論理式 $\top$ はつねに成り立ちますから，$\langle F\rangle\alpha$ は論理記号 $U$ を使って $\top U \alpha$ と表されることが分かります．

### (2)　認識論理

論理式 $\Box\alpha$ を「$\alpha$ を知っている」と解釈するとき，$\Box$ の性質についてどのような要請をすればよいかを考えてみます(ただし，「知っている」の主語は私であっても，また特定のある人としてもかまいません)．この解釈によれば，公理型 [K] は「$\alpha \supset \beta$ と $\alpha$ の両方を知っているならば，$\beta$ を知っている」ことを意味します．同様に [T] は「$\alpha$ を知っているならば $\alpha$」，すなわち「知っている事柄は正しい」ことを意味し，また [4] は「$\alpha$ を知っているならば，$\alpha$ を知っていることを知っている」，すなわち「知っていることについては，それを知っていることを自覚している」ことと理解されます．さらに [5] を，それと同値な形である

$$[5'] : \neg\Box\alpha \supset \Box\neg\Box\alpha$$

に変形すると，「$\alpha$ を知らないならば，$\alpha$ を知らないことを知っている」，すなわち「知らないことについては，それを知らないことを自覚している」ことと理解されます．

これらの公理の妥当性はそれをどういう状況で考えるかにより変わってきます．「知っている」という言葉を「(論理的に) 知り得る」ことと解釈する場合には [K] は正しいと考えられます．しかし，他方それを「知識としてもっている」こととして解釈する場合，[K] は「自分がもつ知識から論理的に帰結されるすべてのことを知っている」(論理的全知) ことを意味するので，これを正しいと見なすのはむずかしいように思われます．$\Box$ を「知っている」と解釈する代りに「信じている」と解釈しても，同様な議論ができます．この場合，[T] は「信じていることは正しい」ことを意味するので，これは妥当ではありません．このように $\Box$ を「知っている」と解釈したり「信じている」と解釈したりすることにより定まる論理を，それぞれ**知識の論理**および**信念の論理**といいます．またこれらの論理を総称して認識論理といいます．このような論理は人工知能やゲーム理論などからも関心がもたれています．もちろん「知っている」の主体を1人に限る必要はありません．ある集団のおのおののメンバー $a$ に対し，「$a$ が知っている」ことを表す記号 $\Box_a$ を導入すれば，この集団のメンバー間の情報交換の状況や，この集団のすべてのメンバーが共有する知識などをこの体系で扱うことが可能になります．このような考え方は，ネットワークで結ばれた多数の計算機からなる分散システムの記述や検証などを扱う際に利用されています．

## 発展

様相論理は部分構造論理とともに非標準論理のうちで現在もっとも盛んに研究が行われています．理論的な方向での興味の中心は様相演算を複数もつ多様相論理や時間論理に移りつつあります．入門的なものとしては[14]，さらに時間論理などへの応用を論じた[8]などがあります．[2]および[18]はこの20年くらいの間に得られた様相論理の結果と重要な手法の優れた解説です．様相論理は時間論理，認識論理などを通して知識表現やソフトウェアの検証，またゲーム理論や経済学などへ盛んに応用されるようになってきました．[6]は知識からの推論 (reasoning about knowledge) についての研究をリードしている研究者によって書かれた解説書です．

## 4.4. 部分構造論理

部分構造論理の研究の基本的な目標は，ゲンツェン流の形式体系の推論規則のうち，構造に関する 3 つの規則，すなわち割増，縮約，交換，のうちのいくつかを制限した体系の論理的性質を議論することです．ランベック (Lambek) がカテゴリ文法 (categorial grammar) を記述するために 1950 年代末に導入した体系は，構造に関するどの規則ももっていません．また 1960 年代から研究が盛んになった適切論理 (relevant logic) は割増規則をもたない論理です．

しかし，構造に関する規則そのものの役割に焦点を合わせた研究が始まったのは 80 年代からです．この本の著者である古森と小野は 1985 年に論文を発表し，その中で縮約規則をもたない論理についての証明論および意味論の両面からの一般論を展開しました．1987 年にはジラール (Girard) が線形論理 (linear logic) とよばれる，割増と縮約のどちらももたない論理を導入し，この論理のもつ計算論的な意義を論じたことにより，このようなタイプの論理に関する関心が一気に高まりました．それを受けて 1990 年にドイツで国際会議が開催され，これらの論理を総称して**部分構造論理 (substructural logics)** とよぶことに決まったのです．

部分構造論理の研究の重要な意義は，「部分構造論理という視点から眺めると，見かけも導入の動機も大きく異なるさまざまの論理を共通に議論することが可能になる」という点にあると考えられます．さらに 1990 年代半ばから始まった部分構造論理の代数的意味論の研究は，部分構造論理にとどまらず非標準論理の研究の方向を転換する大きな契機となりました．これまで非標準論理の意味論，とくに様相論理の意味論においてはクリプキ流の意味論が主流で，この意味論を用いてこれまで多くの成果が得られています．しかし，部分構造論理に対してはあまりクリプキ流の意味論が有効ではありません．他方，以前より代数学で研究が行われていた剰余束 (residuated lattice) がちょうど部分構造論理に対する代数構造になっていることが最近になって明らかになり，これにより部分構造論理の代数的意味論の研究が飛躍的に発展しています．

部分構造論理の研究の序論として，この節では部分構造論理および剰余束とはなにか，どのような非標準論理が部分構造論理の枠組に入るのか，そして部分構造論理の定式化においてゲンツェン流の形式体系がどんな役割を果たすのかなどを明らかにします．

### 4.4.1 構造に関する規則とその役割

1.2 節および 2.1 節で導入したゲンツェン流の体系 LK および LJ の推論規則は，構造に関する規則と論理記号に関する規則の 2 種類から成り立っています．構造に関する規則のうち，割増，縮約，交換は推件式の前件と後件の意味を規定しています．このことを見るために，体系 LJ における構造に関する規則を改めてとりあげてみましょう．その前に，以下のような修正を行っておきます．まず言語としては $\mathcal{L}^*$ をとります．また推件式は $\Gamma \to \gamma$ の形としますが，後件の $\gamma$ は「空でもよい」ものとします．さらに公理型としては，$\alpha \to \alpha$ と $\bot \to$ をとります．さて，構造に関する規則は次の 4 つです (割増の右規則 $(\to w)$ が付け加わっていることと，この先で交換を除いた体系も考えるため前件が一般的な形に変更されていること

の 2 点に注意してください．以下では $\gamma$ は 1 つの論理式か空のどちらかとします)[25]．

**割増**

$$\frac{\Gamma, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha, \Delta \to \gamma}\ (w \to) \qquad\qquad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to \alpha}\ (\to w)$$

**縮約**

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha, \Delta \to \gamma}\ (c \to)$$

**交換**

$$\frac{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \to \gamma}{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \to \gamma}\ (e \to)$$

割増は，前件または空である後件にどんな論理式 (上の場合は $\alpha$) でも付け加えることができることを保証します．同様に，縮約 $(c \to)$ は前件の中にある隣り合った複数の同じ形の論理式を 1 つの論理式で置き換えてよいことを，また交換 $(e \to)$ は 2 つの論理式の順序の入れ換えを許すことを保証しています．したがってこれらの 3 つの規則すべてをもつ体系では，推件式

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \ \to \ \beta \tag{4.4}$$

は，仮定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ のそれぞれを何回か使う (縮約) と $\beta$ が導かれることを意味しています (ただし，1 回も使わなくてもよいし (割増)，またどんな順で使ってもよい (交換))．

言い換えれば，もし割増 $(w \to)$ をもたないときには，前件に「無駄な (または，無関係な)」仮定を付け加えてよいということは保証されません．したがってこの場合，「前件のどの論理式も一度は使うと後件が導かれる」という意味になります．同様に縮約をもたないないときには，「前件のどの論理式 (の出現) も高々一度だけ使うなら後件が導かれる」という意味になるのです．線形論理は割増も縮約ももたない体系ですから，「前件のどの論理式もちょうど一度だけ使うなら後件が導かれる」ということになります．

構造に関する規則は，従来は推件式の意味を規定するためだけの補助的な規則と見なされていましたが，構造に関する規則の使用を限定することにより，推件式の意味づけにこのような柔軟性と多様性を与えることができるのです．やや荒っぽい言い方になりますが，「部分構造論理とは (ゲンツェン流の体系で形式化すると) 構造に関する規則の使用が限定された論理」とひとまず定義しておきましょう．部分構造論理では上に述べたように前件の使い方や現れ方にまで踏み込んだ記述や議論が可能になるため，「資源の使用について鋭敏な」(resource-sensitive) 論理と見なされることもあります．

---

25)　この修正は割増の右規則 $(\to w)$ がもつ役割を明示するためにおこなうものであり，体系の本質的な変更をもたらすものではありません．実際，$\gamma$ が空でない場合，推件式 $\Gamma \to \gamma$ が新たな体系で証明可能であることと元の体系で証明可能であることは同値であり，また推件式 $\Gamma \to$ が新たな体系で証明可能であることと $\Gamma \to \bot$ が元の体系で証明可能であることが同値になります．

### 4.4.2 部分構造論理の体系 FL

部分構造論理を扱う上でもっとも基礎的な体系である FL をここで導入します．体系 FL は推件式を使って形式化されるゲンツェン流の体系であり，基本的には直観主義命題論理の体系 LJ から割増，縮約，交換のすべてを取り除いて得られる体系です[26]．ただ LJ は交換をもつので，論理記号に関する規則のうち前件に主論理式を導入する場合には (記述を簡単にするために) 前件の一番先頭に導入する形にしていました．他方，FL は交換をもたないので，主論理式を前件の任意の位置に導入できるように修正する必要があります．同様な理由で，cut の右下式の cut 論理式の位置は前件のどこでもよいという形に修正する必要があります．したがって，たとえば cut と $(\vee \to)$ はぞれぞれ次の形とします．

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta, \alpha, \Sigma \to \Theta}{\Delta, \Gamma, \Sigma \to \Theta}\ (\mathrm{cut})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Delta \to \Theta \quad \Gamma, \beta, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \to \Theta}\ (\vee \to)$$

同様な修正は $(\wedge \to 1)$ と $(\wedge \to 2)$ に対しても行う必要があります．

#### FL の命題定数

古典論理や直観主義論理を形式化する際に，偽命題を表す命題定数 $\bot$ を導入し，論理式 $\alpha$ の否定 $\neg\alpha$ を $\alpha \supset \bot$ により定義しました．$\bot$ については LJ ではこの 4.4 節の始めに述べたように公理型 $\bot \to$ を仮定しています．LJ ではこの公理型は $\bot \to \gamma$(ただし，$\gamma$ は空でもよい) で置き換えることができます．というのも，LJ は割増の右規則 $(\to w)$ があるからです．

ところが割増の右規則をもたない場合には，これら 2 つの公理型は一致しません．そこで体系 FL では否定を定義するために新たに命題定数 0 を導入し，0 については公理型 $0 \to$ と推論規則

$$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to 0}\ (0w)$$

を仮定します (直観的な言い方をすれば，0 は推件式の「空な後件」を記号化したものといえます)．それに対して，命題定数 $\bot$ を導入する際には

$$\Gamma, \bot, \Delta \to \gamma$$

を仮定します (直観的には，「もっとも偽であるような」矛盾命題ということになります)[27]．割増の右規則があれば，もちろん 0 と $\bot$ は同値になります．

同様なことを割増の左規則 $(w \to)$ についても考える必要があります．$\bot \supset \bot$ を $\top$ と表すと $\Gamma \to \top$ が証明できます．いま命題定数 1 に対して $\to 1$ と仮定しましょう．これから $\Gamma \to 1$ を導くには割増の左規則が必要です．つまり割増の左規則をもたない論理では $\top$ と 1

26) FL はランベックがカテゴリ文法の記述のために導入した体系に論理和と論理積を付け加えた体系と見なすことができます．そこで Full Lambek 計算の頭文字をとって FL とよぶのです．

27) 線形論理に関する文献では，この本での $\bot$, 0 を逆に 0, $\bot$ と表している場合が多いので注意が必要です．

を区別する必要があります．そこで体系 FL では命題定数 1 について公理型 → 1 と推論規則

$$\frac{\Gamma,\ \Delta \to \gamma}{\Gamma,\ 1,\ \Delta \to \gamma}\ (1w)$$

を仮定します (上の例にならって直観的な言い方をすると，1 は推件式の「空な前件」を記号化したものです)．それに対して ⊤ は Γ → ⊤ が示されますから，直観的には「もっとも真であるような」命題ということになります．後述の代数的な意味論において，これら 4 つの命題 ⊥, 0, 1, ⊤ のもつ機能の違いがさらに明らかになります (以下では一般に言語は命題定数 0, 1 を含むことを仮定しますが，⊥ (したがって ⊤ も) は含むとは限らないとしておきます)．

### FL の含意と否定

体系 FL は交換をもたないので，次の推論規則で定められる 2 つの含意記号 / と \ を用意しておくのが自然です．

/ に関する規則

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \to \gamma}{\Delta, \beta/\alpha, \Gamma, \Sigma \to \gamma}\ (/ \to) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \to \beta}{\Gamma \to \beta/\alpha}\ (\to /)$$

\ に関する規則

$$\frac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \to \gamma}{\Delta, \Gamma, \alpha\backslash\beta, \Sigma \to \gamma}\ (\backslash \to) \qquad \frac{\alpha, \Gamma \to \beta}{\Gamma \to \alpha\backslash\beta}\ (\to \backslash)$$

上の 2 つの左規則の下式を見ると，$(/ \to)$ では Γ は $\beta/\alpha$ の右にありますが，$(\backslash \to)$ では Γ は $\alpha\backslash\beta$ の左にあることに注意してください．/ と \ の右規則から，それぞれ $\beta/\alpha, \alpha \to \beta$ と $\alpha, \alpha\backslash\beta \to \beta$ が証明できることを注意しておきましょう．交換を使うと $\beta/\alpha$ と $\alpha\backslash\beta$ は論理的に同値になります．つまり，$\alpha/\beta \to \alpha\backslash\beta$ と $\alpha\backslash\beta \to \alpha/\beta$ とが証明可能です．そこで交換をもつ FL の拡張体系では，/ や \ の代わりに，これまで使ってきた記号 ⊃ を使うことにします．2 つの含意に対応して 2 つの否定 ∼, − が，それぞれ $\sim\alpha$ は $\alpha\backslash 0$, $-\alpha$ は $0/\alpha$ の省略として定義されます．交換をもつ場合には記号 ¬ を使います．

### コンマと融合積

推件式の定義には補助記号としてコンマが使われています．体系 LJ では推件式

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \ \to\ \beta \tag{4.5}$$

が LJ で証明可能であるとき，またそのときに限り，推件式

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \ \to\ \beta \tag{4.6}$$

が LJ で証明可能であることを示すことができます．簡単のため $m = 2$ の場合には，このことは次のようにして示すことができます．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha_1,\ \alpha_2 \to \beta}{\alpha_1 \wedge \alpha_2,\ \alpha_1 \to \beta}\ (\wedge \to 1)}{\alpha_1 \wedge \alpha_2,\ \alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \beta}\ (\wedge \to 2)}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \beta}\ (c \to)$$

逆に

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha_1 \to \alpha_1}{\alpha_1,\ \alpha_2 \to \alpha_1}\ (w \to) \quad \dfrac{\alpha_2 \to \alpha_2}{\alpha_1,\ \alpha_2 \to \alpha_2}\ (w \to)}{\alpha_1,\ \alpha_2 \to \alpha_1 \wedge \alpha_2}\ (\to \wedge) \quad \alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \beta}{\alpha_1,\ \alpha_2 \to \beta}\ (\mathrm{cut})$$

つまり体系 LJ ではコンマは内容的には論理積「かつ」を意味しています．ここで，上の証明で縮約および割増が使われていることを注意しておきましょう．つまり割増と縮約の少なくとも一方を欠く体系では，(4.5) の証明可能性と (4.6) の証明可能性が一致するとは限らないのです．言い換えると推件式のコンマは必ずしも論理積を意味するとはいえないのです．

そこで，一般的な場合にコンマがどのような意味をもつかを明らかにするために，新たに論理記号 '$\cdot$' を導入します[28]．この '$\cdot$' を**融合積 (fusion)**(または乗法的論理積 (multiplicative conjunction)) とよびます．融合積については，(4.5) が証明可能であるとき，またそのときに限り，

$$\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_m \quad \to \quad \beta \tag{4.7}$$

が証明可能になるように推論規則を定める必要があります．そこで $\cdot$ に関する規則として次のものをとります．

$$\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \to \gamma}{\Gamma,\ \alpha \cdot \beta,\ \Delta \to \gamma}\ (\cdot \to) \qquad \dfrac{\Gamma \to \alpha \quad \Delta \to \beta}{\Gamma,\ \Delta \to \alpha \cdot \beta}\ (\to \cdot)$$

▶ **問題 4.4.1**　上の 2 つの規則を使い，(4.5) 式の証明可能性と (4.7) 式の証明可能性が一致することを $m = 2$ の場合について示せ．

上に示した LJ では (4.5) の証明可能性と (4.6) の証明可能性が一致するという証明から，縮約をもつ論理では $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \alpha_1 \cdot \alpha_2$ が証明できる一方，割増の左規則をもつ論理では $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \to \alpha_1 \wedge \alpha_2$ が証明できることが分かります．

融合積と普通の論理積の違いを説明するために次のような例を考えてみましょう．仮に「コーヒー 1 杯が 500 円」で，また「文庫本 1 冊が 500 円」としましょう．$\gamma, \alpha, \beta$ がそれぞれ「500 円を支払う」,「コーヒー 1 杯を飲むことができる」,「文庫本 1 冊を買うことができる」を表すとすると，$\gamma \to \alpha$ と $\gamma \to \beta$ はともに正しいことになります．融合積と論理積の左規則を使うと，それぞれ $\gamma, \gamma \to \alpha \cdot \beta$ および $\gamma \to \alpha \wedge \beta$ が推論されます．最初の文は「1000 円でコーヒー 1 杯を飲み，文庫本 1 冊を買うことができる」ことを表します．それに対して 2 番目の文は「500 円でコーヒー 1 杯を飲み，文庫本 1 冊を買うことができる」ことを意味するのではなく，「500 円でコーヒー 1 杯を飲むことも文庫本 1 冊を買うこともできる (しか

---

28) 線形論理では '$\cdot$' の代わりに $\otimes$ という記号が用いられています．

し両方できるわけではない)」という意味になります．このような点で部分構造論理は資源の論理と見なされるのです．

体系 FL では融合積と 2 つの含意の間に，**剰余関係**とよばれる次の基本的な結果が成り立ちます．

**定理 4.4.2**　体系 FL では次の 3 つの条件は同値である：

1. $\alpha \cdot \beta \to \gamma$ が証明可能である，
2. $\beta \to \alpha \backslash \gamma$ が証明可能である，
3. $\alpha \to \gamma / \beta$ が証明可能である．

### 4.4.3　部分構造論理とその基本体系

部分構造論理の厳密な定義を一般的な形で与えることにしましょう．まず体系 FL の公理的拡大とは，FL にいくつかの (無限であってもよい) 公理型を付け加えて得られる体系のこととします．この FL の公理的拡大のことを (FL 上の) **部分構造論理**とよぶことにしましょう[29]．

体系 FL に構造に関する規則，すなわち割増 (weakening)，縮約 (contraction)，交換 (exchange) の規則，のうちのいくつかを付け加えてえられる体系は部分構造論理の基本的な体系になります．ここで，割増の 2 つの規則，縮約，交換はそれぞれ次の公理型で置き換えられることを注意しておきましょう．

(o)　$0 \;\to\; \alpha,$

(i)　$\alpha, \beta \;\to\; \beta$ および $\beta, \alpha \;\to\; \beta,$

(c)　$\alpha \;\to\; \alpha \cdot \alpha,$

(e)　$\alpha \cdot \beta \;\to\; \beta \cdot \alpha.$

これらの体系は対応する構造に関する規則の名前を添字として使って，たとえば (e) を付け加えた体系は $\mathrm{FL_e}$，(e) と (c) を付け加えた体系は $\mathrm{FL_{ec}}$ などのように表すことにします．また (o) と (i) をあわせて (w) と書くことにします．$\mathrm{FL_e}$ はジラールの (exponentials をもたない) 直観主義的線形論理に一致します．ジラールの (exponentials をもたない) 線形論理 (MALL) は古典論理の体系 LK から割増と縮約の両方を除いた体系として形式化されますが，これは $\mathrm{FL_e}$ に二重否定の法則 $\neg\neg\alpha \to \alpha$ を公理型として加えた体系と同等です．

▶ **問題 4.4.3**　交換規則は $\mathrm{FL_{cw}}$ の派生規則であること，したがって $\mathrm{FL_{cw}}$ は直観主義論理と同等な体系であることを確かめよ．

これらの体系について基本定理を示すことができます．

---

29)　「論理」を考えるときには，証明可能性が一致する 2 つの体系は同一視しています．したがって正確には「部分構造論理の体系とは FL の公理的拡大と同等な体系のことである」というべきでしょう．

**定理 4.4.4** 体系 FL, $FL_e$, MALL, $FL_w$, $FL_{ew}$, $FL_{ec}$, $FL_{ecw}$ において cut の除去に関する基本定理が成立する．

これに対し，$FL_c$ については基本定理は成り立ちません．基本定理から次の結果が得られます．

**定理 4.4.5** 命題論理の体系 FL, $FL_e$, MALL, $FL_w$, $FL_{ew}$, $FL_{ec}$, $FL_{ecw}$ はどれも決定可能である．

部分構造述語論理についてはここでは詳しくは述べませんが，縮約をもたない体系 FL, $FL_e$, $FL_w$, $FL_{ew}$，および線形論理 MALL の場合には，述語論理であってもどれも決定可能です．他方，縮約をもつ体系 $FL_{ec}$ は直観主義述語論理の場合と同様に決定可能ではありません．このことから，決定問題において縮約規則が重要な役割を果たしていることが分かります．

部分構造論理とは FL の公理的拡大のことであると定義しましたが，中間論理の場合と同様に論理を論理式の集合と同一視するならば，部分構造論理を次のように定義することもできます．

**定義 4.4.6（論理式の集合としての部分構造論理）** FL の言語上の (命題論理の) 論理式の集合 L が次の 5 つの条件を満たすとき，L を (FL 上の) 部分構造論理という：

1. L は FL で証明可能な論理式をすべて含む，
2. $\varphi, \varphi\backslash\psi \in \mathrm{L}$ ならば $\psi \in \mathrm{L}$,
3. $\varphi \in \mathrm{L}$ ならば $\varphi \wedge 1 \in \mathrm{L}$,
4. $\varphi \in \mathrm{L}$ で $\psi$ が任意の論理式ならば $\psi\backslash(\varphi \cdot \psi), (\psi \cdot \varphi)/\psi \in \mathrm{L}$,
5. L は代入に関して閉じている．

3 番目の条件は

$$\varphi, \psi \in \mathrm{L} \ \text{ならば}\ \varphi \wedge \psi \in \mathrm{L}$$

で置き換えることができます．割増の左規則 (i) をもつ部分構造論理ではこの条件はつねに成り立つので不要です．また交換 (e) をもつ部分構造論理では 4 番目の条件が不要になります．とくに L が構造に関する規則をすべてもつ場合，すなわち L が $LJ$ で証明可能な論理式をすべて含むときには，上の定義は定義 4.1.18 で述べた中間論理の定義とちょうど一致します．

4.1 節で触れた推論可能関係は，ゲンツェン流の形式化に基づく部分構造論理の場合には次のように定義されます．体系 FL に公理型としてさらに $\rightarrow \gamma$ (ただし $\gamma \in \Gamma$) を付け加えた体系で推件式 $\rightarrow \alpha$ が導かれるとき，

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{FL}} \alpha$$

と表します．次に一般の部分構造論理 L に対する推論可能関係 $\vdash_{\mathrm{L}}$ は，

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \alpha \text{ となるのは } \mathrm{L} \cup \Gamma \vdash_{\mathrm{FL}} \varphi \text{ が成り立つとき}$$

として定義し，これを論理式 $\alpha$ は L で論理式の集合 $\Gamma$ から推論可能であるということにします．ただし，この定義では L を論理式の集合と見なしています．

古典論理や直観主義論理の場合とは違って，部分構造論理の場合には一般には演繹定理は成り立ちませんが，「パラメタつき」局所演繹定理とよばれる一般化した形の局所演繹定理ならば成り立つことが分かっています．ただ $\mathrm{FL_e}$ を含む部分構造論理であれば，(パラメタを含まない) 次の局所演繹定理が成り立っています．

**定理 4.4.7（部分構造論理の局所演繹定理）**　L を $\mathrm{FL_e}$ を含む任意の部分構造論理とする．

$$\Gamma, \alpha \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$$

が成り立つための必要十分条件は，ある $m \geq 0$ が存在して

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} (\alpha \wedge 1)^m \supset \varphi$$

が成り立つことである．ただし，$(\alpha \wedge 1)^m$ は $m$ 個の $\alpha \wedge 1$ を融合積で結んで得られる論理式を表す．

上の定理に現れる $m$ を求める一般的は方法は存在しません．もし $m$ を求めるアルゴリズムがあるならば定理 4.4.5 により推論可能関係も決定可能のはずですが，それは次の結果に矛盾します．

**定理 4.4.8**　論理 $\mathrm{FL_e}$ の推論可能関係は決定不能である．すなわち，与えられた論理式の有限集合 $\Gamma$ と論理式 $\alpha$ に対し

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{FL_e}} \alpha$$

となるかどうかを判定するアルゴリズムは存在しない．

ここで 1.2 節の発展の項で述べた含意断片論理といくつかの部分構造論理の基本的体系との関係を明らかにしておきましょう．割増の左，縮約，交換はそれぞれ 1.2 節の公理型の K, W, C に対応しています．体系 FL の拡張体系 $\mathrm{FL}_\sigma$ に対し，その論理記号に関する規則を $(\supset\rightarrow)$ と $(\rightarrow\supset)$ のみに制限した体系を $\mathrm{FL}_\sigma^-$ と表すことにしておきます．すると次の結果が得られます．

> **定理 4.4.9** $\Gamma, \gamma$ の中の論理式はすべて命題定数も '$\supset$' 以外の論理記号も含まない命題論理の論理式とする．このとき次の 3 つの条件は同値である：
> 1. $\Gamma \to \gamma$ が $\mathrm{FL_e}$ で証明可能である，
> 2. $\Gamma \to \gamma$ が $\mathrm{FL_e^-}$ で証明可能である，
> 3. $\Gamma \vdash_{BCI} \gamma$.
>
> 同様なことがそれぞれ $\mathrm{FL_{ew}}$, $\mathrm{FL_{ew}^-}$，BCK の間，$\mathrm{FL_{ec}}$, $\mathrm{FL_{ec}^-}$，BCIW の間，$\mathrm{FL_{ecw}}$, $\mathrm{FL_{ecw}^-}$，BCKW の間にも成り立つ．

**証明**　2 から 1 が導かれることは明らかです．逆に 1 を仮定すると，$\mathrm{FL_e}$ の基本定理を使えば LJ についての定理 4.1.9 と同様にして，「$\Gamma \to \gamma$ に至る証明図のうちでその中に現われる論理式がすべて $\Gamma, \gamma$ の中の論理式の部分論理式だけからなるものがある」ことが示されます．$\Gamma, \gamma$ についての仮定から，この証明図で使われている論理記号に関する規則は ($\supset\to$) と ($\to\supset$) に限られていることになります．したがってこの証明図は $\Gamma \to \gamma$ に至る $\mathrm{FL_e^-}$ の証明図であることが分かります．2 と 3 の同値性は定理 1.2.53 と同様な考え方で証明できます．

□

### 4.4.4　いろいろな部分構造論理 (I)

部分構造論理の中には，ランベック計算，線形論理や 4.1 節で述べた超直観主義論理などに加え，縮約をもたない $\mathrm{FL_{ew}}$ やそれに二重否定の法則を付け加えた論理，ヨハンソン (Johansson) の最小論理 (minimal logic) とその拡張体系であるパラコンシステント論理 (paraconsistent logic)，割増をもたない適切論理 (relevant logic) などの代表的な非標準論理の多くが含まれます．以下ではその中でランベック計算と適切論理について基本的な考え方を簡単に紹介します．

#### (1)　カテゴリ文法とランベック計算

カテゴリ文法は自然言語の文を構成する語 (の列) がもつ構文論的型 (または文法的カテゴリ) に注目し，どのような規則が型を支配しているかを論議します．この規則を形式体系として表現したのがランベック計算 (Lambek calculus) です．

いま，$N$ を名前 (または 'もの') の型，$S$ を平叙文 (または命題) の型とします．たとえば固有名詞 *John* は型 $N$ をもち，文 *John works* は型 $S$ をもちます．次に型 $x$ と $y$ に対し，型 $x\backslash y$ および $y/x$ を次のように定義します．語の列 $u$ が型 $x$ をもつとき，語の列 $uw$ がつねに型 $y$ をもつならば，語の列 $w$ は型 $x\backslash y$ をもつとします．同様に，$vu$ がつねに型 $y$ をもつならば，$v$ は型 $y/x$ をもつと定めます．英語の自動詞 (たとえば *works*) は，型 $N$ の語 (たとえば *John*) を左に置く (*John works*) と，全体は平叙文ですから型 $S$ をもつことになります．したがって *works* の型は $N\backslash S$ ということになります．同様に，英語の他動詞は型 $N\backslash(S/N)$ とともに $(N\backslash S)/N$ をもち，また副詞は型 $(N\backslash S)\backslash(N\backslash S)$ をもつことが確かめられます．

例としてここで *John works gladly* という文をとりあげてみましょう．文 *John works* お

よび *John works gladly* はともに型 $S$ をもつので，*gladly* は型 $S\backslash S$ をもつと考えることができます．他方，*John* は型 $N$ をもち，*John works gladly* は型 $S$ をもつので，*works gladly* は型 $N\backslash S$ をもち，したがって *gladly* は $(N\backslash S)\backslash(N\backslash S)$ という型ももつことになります．つまり，*gladly* は前者の場合には文を修飾する語として，また後者の場合には自動詞 *works* を修飾する語として扱われ，そのために 2 つの型をもつのです．カテゴリ文法では一般に，ある語 (の列) が型 $x\backslash y$ をもつときには，それは同時に $(z\backslash x)\backslash(z\backslash y)$ の型ももつと考えられています．この規則を

$$x\backslash y \;\rightarrow\; (z\backslash x)\backslash(z\backslash y) \tag{4.8}$$

という形で表します．

一般に，$x_1, x_2, \cdots, x_m$ が型とするとき，型 $x_i$ をもつ任意の語 (の列)$w_i$ $(i = 1, \cdots, m)$ に対し，それらすべてを並べた語の列 $w_1 w_2 \cdots w_m$ が型 $y$ をもつならば，そのことを

$$x_1, x_2, \cdots, x_m \;\rightarrow\; y \tag{4.9}$$

と表すことにします．(4.9) は型の間に成り立つ規則を表すことになります．$\backslash$ と / の定め方から

$$x, x\backslash y \;\rightarrow\; y \tag{4.10}$$

$$y/x, x \;\rightarrow\; y \tag{4.11}$$

が成り立つ必要があります．

ランベックは (4.10) や (4.11) のように型の間に成立する一般的な規則を導き出すような形式体系を導入しました．この体系が**ランベック計算**です．もともとランベックが導入した計算は，FL を 2 つの含意 $\backslash$ と / の規則に制限した体系 $\mathrm{FL}^-$ に他なりません[30]．実際，$\mathrm{FL}^-$ で (4.8) を導くことができます．

▶ **問題 4.4.10**　他動詞は型 $N\backslash(S/N)$ および $(N\backslash S)/N$ をもつことを上で述べた．一般に

$$x\backslash(z/y) \;\rightarrow\; (x\backslash z)/y$$

が $\mathrm{FL}^-$ で証明可能であることを確かめよ．

### (2)　適切論理

古典論理では含意命題 $\alpha \supset \beta$ は $\neg\alpha \vee \beta$ と同値です．つまり $\alpha \supset \beta$ が真となるのは $\alpha$ が偽または $\beta$ が真のどちらかが成り立つときです．このような含意を**実質的含意** (material implication) といいます．「$1 = 2$ ならば今日は雪が降る」という命題の「ならば」を実質的含意と見なすとこの命題は真になりますが，日常的な場面ではこの命題が正しいとするのには違和感があるかと思います．なぜなら「$1 = 2$」と「今日は雪が降る」との間には何の関係もないからです．つまり日常的な用法で '$\alpha$ ならば $\beta$' や '$\alpha$ から $\beta$ が導かれる' という形の命

30) 厳密にいえば，もともとのランベック計算の場合には，文法としての意味づけから (4.9) で $m = 0$ の場合，つまり前件が空となることは許されません．

題が正しいと考えるときには，$\alpha$ と $\beta$ の間に何らかの因果関係があるのが普通だからです．

日常的な含意のように，「'$\alpha$ ならば $\beta$' が成り立つのは，$\alpha$ と $\beta$ が概念的に関連し，それらの間に本質的な結びつきをもつときに限られる」という考え方で含意の規則を形式化する試みはこれまでいろいろ行われています．**適切論理**はそのうちの 1 つです．この意味での 'ならば' のことを適切含意 (relevant implication) といいます．もちろん「適切さ」を明確な形で定義するのはむずかしく，そのためにいくつもの適切論理が提案されています．ただそれらの共通項として次の点をあげることができます．

1. 矛盾から任意の命題を導くことはできない，
2. $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ から $\beta$ が導かれるとき，仮定 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ のどれも $\beta$ の導出に必要なものでなければならない．

これは割増の右と左の規則を認めないことにちょうど対応しています．適切論理の体系のうちもっとも代表的なものは R とよばれるものです．体系 R は $\mathrm{FL_{ec}}$ に公理型として二重否定の法則 $\neg\neg\alpha \to \alpha$ および分配則

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \ \ \to \ \ (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \tag{4.12}$$

を付け加えたものです．体系 R は決定不能です．またその含意断片は BCIW に等しいことが分かっています．

▶ **問題 4.4.11**　(4.12) が LJ で証明可能であることを示せ．また，その証明図で割増と縮約の両方が使われていることを確かめよ．

### 4.4.5　剰余束と部分構造論理

中間論理の代数的な意味論はハイティング代数により与えられますが，一般の部分構造論理の代数的な意味論は次に述べる**剰余束 (residuated lattice)**，正確には定数 0 をもつ剰余束である **FL 代数**により与えられます．剰余束はもともとは 1930 年代に環のイデアル論に関連して導入された概念です．

半群とモノイドについてはすでに 4.2.1 節で紹介しましたが，いま代数構造 $\mathbf{A} = \langle A, \cdot, 1, \leq \rangle$ が**順序モノイド (ordered monoid)** であるとは，$\langle A, \cdot, 1 \rangle$ がモノイドで，$\leq$ が順序であり，さらに次の単調性

$$x \leq y \ \text{ならば}, \quad x \cdot z \leq y \cdot z \ \text{かつ} \ z \cdot x \leq z \cdot y$$

が成り立つこととします．

**定義 4.4.12（剰余束と FL 代数）**　代数 $\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1 \rangle$ が次の 3 つの条件を満たすとき，$\mathbf{A}$ を剰余束という：

1. $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ は束である，
2. $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ は単位元 1 をもつモノイドである，

3. 任意の $x, y, z \in A$ に対し，$x \cdot y \leq z \iff y \leq x\backslash z \iff x \leq z/y$ が成り立つ．

3 番目の条件は**剰余の法則 (the law of residuation)** とよばれます．この条件から，$\langle A, \cdot, 1, \leq \rangle$ が順序モノイドであることが導かれます．束およびモノイドは等式クラスですが，剰余の法則も次の不等式で表すことができるので，剰余束は等式クラスになります．

- $x \cdot (x\backslash y) \leq y$,
- $z \leq (x\backslash((x \cdot z) \vee y))$,
- $(y/x) \cdot x \leq y$,
- $z \leq (((z \cdot x) \vee y)/x)$.

剰余束の典型的な例は束順序群です．束順序群とは，順序モノイドであってさらに (1) モノイドが群であり，また (2) 順序関係について束になっているような代数のことです．この場合，$x^{-1} \cdot z$ および $z \cdot y^{-1}$ がそれぞれ $x\backslash z$, $z/y$ になります．

論理の代数的意味論のためには否定の代数的解釈が必要です．そのために剰余束の定義にさらに定数として 0 を加えた代数

$$\mathbf{A} = \langle A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1, 0 \rangle$$

を **FL 代数**とよびます．ここで，0 については $A$ の要素であるということ以外には何も仮定していません．ですから，たとえ $\mathbf{A}$ が最小元 $\bot$ や最大元 $\top$ をもつとしても，それらが 0 や 1 に等しいとは限りませんし，また $0 \leq 1$ とも限りません．

論理式や推件式の恒真性はハイティング代数の場合と同様に定義されます．すなわち，$\mathbf{A}$ を FL 代数で，$f$ が命題変数全体の集合から集合 $A$ への写像のとき，$f$ は $\mathbf{A}$ の上の付値であるといいます．$\mathbf{A}$ の上の付値 $f$ は次のようにして論理式全体の集合から $A$ への写像に拡張できます．

1. $f(1) = 1$,  $f(0) = 0$,
2. $f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$, $f(\alpha\backslash\beta) = f(\alpha)\backslash f(\beta)$, $f(\alpha/\beta) = f(\alpha)/f(\beta)$,
   $f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \wedge f(\beta)$, $f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \vee f(\beta)$[31].

FL 代数 $\mathbf{A}$ の上の任意の付値 $f$ に対して

$$1 \leq f(\alpha)$$

のとき，論理式 $\alpha$ は $\mathbf{A}$ で**恒真**であるといいます．また FL の任意の推件式 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \to \beta$ について，どんな付値 $f$ に対しても

$$f(\alpha_1) \cdot \cdots \cdot f(\alpha_m) \leq f(\beta)$$

31) この定義で論理記号と対応する代数演算に同じ記号を使っていますが混同しないよう注意してください．

のとき，この推件式は $\mathbf{A}$ で恒真であるということにします．ただし，$m=0$ であれば $1 \leq f(\beta)$，そして $\beta$ がないときは $f(\alpha_1)\cdot \cdots \cdot f(\alpha_m) \leq 0$ を代わりにとります．定理 4.2.19 と同様に次のことが証明できます．

**定理 4.4.13**　任意の部分構造論理 L に対し FL 代数のある等式クラス $\mathcal{K}$ が存在し，L は $\mathcal{K}$ に関して完全である．すなわち任意の命題論理の論理式 $\alpha$ に対し，$\alpha$ が L に属すことと，$\alpha$ が $\mathcal{K}$ に属すすべての FL 代数で恒真であることとは同値である．

構造に関する規則である割増の右，左，縮約，交換は，それぞれ

$$0 \leq x, \quad x \leq 1, \quad x \leq x \cdot x$$

および

$$x \cdot y \approx y \cdot x$$

という等式で表される FL 代数上の条件に対応します．とくに FL 代数 $\mathbf{A}$ がこの条件のすべてを満たすときには，0 は最小元，1 は最大元で，さらに

$$x \cdot y \approx x \wedge y$$

が成り立つので，$\mathbf{A}$ はハイティング代数になります．したがってこの定理は定理 4.2.19 の内容を含んでいます．

上の定理は任意の部分構造論理の (FL 代数のある等式クラスに関する) 代数化定理という形にまで強めることができます．直観主義論理に対する代数化定理 (定理 4.2.21) では，それぞれの論理式 $\alpha$ を等式 $\alpha^\tau \approx 1$ に，またそれぞれの等式 $s \approx t$ を論理式 $(s^\varphi \to t^\varphi) \wedge (t^\varphi \to s^\varphi)$ に対応させました．それを，論理式 $\alpha$ を等式 $(\alpha^\tau \wedge 1) \approx 1$ に (すなわち，$1 \leq \alpha^\tau$ に)，そして等式 $s \approx t$ を論理式 $(s^\varphi \backslash t^\varphi) \wedge (t^\varphi \backslash s^\varphi)$ に対応させるという形に変更するだけで**部分構造論理の代数化定理**が得られます．この結果は論理と代数を結ぶ議論で重要な役割を果たします．

これらの結果により，部分構造論理は「剰余構造の論理」であると理解することができます．つまり，部分構造論理のもつもっとも基本的な性質は，含意と融合積の間にいつも剰余の法則が成り立つということです．このことは何を意味するのでしょうか．

この本の冒頭でも述べたことですが，含意「ならば」はもっとも基本的な論理記号です．そのために哲学や数学のいろいろな立場から含意をどのように理解するかについて議論が行われてきたのです．他方，融合積は数学的には非常に単純で扱いやすいモノイド演算と見なされます．ですから剰余の法則が成り立つ場合には，含意の性質は融合積の性質を分析することによって，より詳しく理解できると考えられます．これを「割り算」と「かけ算」との関係に譬えることができます．「割り算」は「かけ算」の剰余演算ですから，(扱いやすい)「かけ算」の性質の理解を通してその性質が明らかにされるのです．

融合積はもともとは推件式に補助的に使われていたコンマを論理記号の形で表したもので

す．そして，構造に関する規則とは融合積に関するいくつかのもっとも基本的な性質を表現したものです．部分構造論理の研究は論理をゲンツェン流の体系で形式化し，その体系で構造に関する規則が果たす役割に注目することから出発しました．推件式を使う形式化が，部分構造論理の中に潜んでいた剰余関係の姿を明らかにしたのです．このようにゲンツェン流の体系による形式化は，部分構造論理という概念をつくり出す際に本質的な役割を果たしてきたと考えられます．

### 4.4.6　いろいろな部分構造論理 (II)

部分構造論理の中にはもともと意味論的に導入されたものがあります．代表的な例としてはウカシェヴィチ (**Łukasiewicz**) の**多値論理**や，$t$-ノルム (triangular norm) に基づいて定義される**ファジー論理 (fuzzy logic)** があげられます．ここでは意味論の視点から，これらの論理がどのような剰余構造により定められているのかを述べることにします．

#### (1)　ウカシェヴィチの多値論理

1 章で，古典論理で証明可能な論理式はトートロジーであり，その逆も成り立つことを示しました．トートロジーとは，命題変数に真と偽の 2 つの真理値をどのように与えても，いつも値が真になるような論理式です．論理式の値の計算には真理表を使います．このことにより古典論理は 2 値論理であるといわれます．1920 年代にウカシェヴィチはこの考え方を一般化して多値論理を導入しました．$n+1$ 値論理 $(n>0)$ の場合には真理値として $0, 1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n, 1$ をとるものとします．真理値は「真である度合い」を表すと考えます．2 値であれば 0 が偽，1 が真に対応します．さらに真理値の集合を拡げて，実数の単位区間 $[0, 1]$ をとることも考えられます．

いずれの場合も真理値は大小関係により順序づけられるので，$\wedge$ と $\vee$ をそれぞれ

$$a \wedge b = \min\{a, b\}, \quad a \vee b = \max\{a, b\}$$

と定めるのが妥当でしょう．ウカシェヴィチは $\supset$ を次のように定めています．

$$a \supset b = \min\{1, 1-a+b\}$$

すると $\neg a = a \supset 0 = 1-a$ になります．この $\supset$ の定義にしたがって 2 値の場合の計算をしてみると，ちょうど古典論理の場合の $\supset$ の真理表に一致することが分かります．さて，ここで ‘$\cdot$’ を

$$a \cdot b = \max\{0, a+b-1\}$$

と定義してみましょう．すると ‘$\cdot$’ は 1 を単位元とする交換可能なモノイド演算であり，さらに ‘$\cdot$’ と ‘$\supset$’ の間に剰余の法則が成り立つことが分かります．つまりこのような真理値の集合とその上の演算は FL 代数になるのです．この FL 代数が定める部分構造論理がウカシェヴィチの多値論理です．演算 ‘$\cdot$’ の交換可能性および 0 と 1 がそれぞれ最小元と最大元であることから，これらの多値論理は $\mathrm{FL_{ew}}$ を含むことになります．他方，$0<a<1$ の場合には

$a \leq a \cdot a$ は成り立たないので，2 値論理以外のウカシェヴィチの多値論理は縮約規則をもたないことが分かります．

### (2) ファジー論理

次に $t$-ノルムが定めるファジー論理をとりあげましょう．ここでは実数の単位区間 [0, 1] だけを真理値の集合としてとります．まず [0, 1] 上の 2 項演算 $\cdot$ が $t$-ノルムであるとは，$\langle [0, 1], \cdot, 1, \leq \rangle$ が 1 を単位元とする交換可能な順序モノイドであることとします．ここでさらに $\cdot$ は (実数上の 2 変数関数として) 左連続であると仮定します．すなわち $a_i$ $(i \in I)$ および $b_j$ $(j \in J)$ を [0, 1] に属す実数とするとき

$$(\sup a_i \cdot \sup b_j) = \sup(a_i \cdot b_j) \tag{4.13}$$

が成り立つものとします．$a, b$ を [0, 1] に属す任意の実数とすると，左連続の仮定のもとでは集合 $\{z : a \cdot z \leq b\}$ に最大元が存在することが保証されるので，これを

$$a \supset b$$

と表します．定義より明らかに '$\cdot$' と '$\supset$' の間に剰余の法則が成り立ちます．このように [0, 1] 上の左連続な $t$-ノルムのそれぞれは FL 代数を決め，それにより部分構造論理が定まることになります．この部分構造論理は MTL とよばれ，$\mathrm{FL_{ew}}$ に

$$(\alpha \supset \beta) \vee (\beta \supset \alpha) \tag{4.14}$$

を公理型として付け加えることにより得られます．「左連続」という仮定を「連続」で置き換えた体系，つまり (4.13) に加え，次の関係

$$(\inf a_i \cdot \inf b_j) = \inf(a_i \cdot b_j) \tag{4.15}$$

も仮定した体系は，MTL に公理型

$$(\alpha \wedge \beta) \supset (\alpha \cdot (\alpha \supset \beta)) \tag{4.16}$$

を付け加えることにより得られます．この体系は BL とよばれ，ファジー論理の基本的体系と見なされています．

区間 [0, 1] 上の連続的 $t$-ノルムのうち，代表的なものは次の 3 つです．1 番目は，区間 [0, 1] を真理値の集合とするウカシェヴィチの多値論理で，剰余積 '$\cdot$' は

$$a \cdot b = \max\{0, a + b - 1\}$$

として定義されます．つまりこの多値論理はファジー論理とも見なされるのです．2 番目は

$$a \cdot b = \min\{a, b\}$$

と定義されます．この場合は

$$a \cdot b = a \wedge b$$

が成り立つので，得られる代数はハイティング代数になります．したがってこの代数が定めるファジー論理は中間論理になります．これはゲーデル・ダメット (Gödel-Dummett) の論理とよばれ，HJ に公理型 4.14 を付け加えた体系に一致します．

最後のものは，

$$a \cdot b = a \times b$$

と定義されます．この $\times$ は実数の積を表します．この場合，剰余関係にある $\supset$ は，$a \leq b$ なら

$$a \supset b = 1,$$

そうでなければ

$$a \supset b = b/a \quad (b \text{ を } a \text{ で割った値})$$

になります．この代数が定めるファジー論理は積論理 (product logic) とよばれています．この論理は古典論理より弱い論理ですが，面白いことに，この論理と古典論理の間には論理は 1 つもありません．つまり積論理は古典論理の「すぐ下」にある論理 (の 1 つ) です．

### 発展

部分構造論理に関連する研究は現在急速に発展しています．部分構造論理全体についての理論的な研究とともに，部分構造論理に属す線形論理，多値論理，ファジー論理，ランベック計算などの計算機科学，工学，言語学などへの応用的研究も大きく進展しています．他方，剰余束に関する代数的研究との結びつきで，部分構造論理の代数的意味論が論理と代数学の両面から注目されるようになりました．

部分構造論理と剰余束一般について論じたものとしては[7]があります．線形論理については[16]，多値論理については[4]，ファジー論理については[11]が基本的な文献です．

# 参考文献


[ 1 ] H. Barendregt. *The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics*, Vol. 103 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland, revised edition, 1984.

[ 2 ] P. Blackburn, M. de Rijke and Y. Venema. *Modal Logic,* Vol. 53 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science.* Cambridge University Press, 2001.

[ 3 ] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra.* Springer, 1981. available online.

[ 4 ] R. L. O. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano and D. Mundici. *Algebraic Foundations of Many-valued Reasonings,* Vol. 7 of *Trends in Logic.* Kluwer Academic Pub., 2000.

[ 5 ] B. A. Davey and H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge University Press, 2nd edition, 2002.

[ 6 ] R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses and M. Y. Vardi. *Reasoning about Knowledge.* MIT Press, 1995.

[ 7 ] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono. *Residuated Lattices : An Algebraic Glimpse at Substructural Logics,* Vol. 151 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Elsevier, 2007.

[ 8 ] R. Goldblatt. *Logic of Time and Computation,* Vol. 7 of *CSLI Lecture Notes.* CSLI, 2nd edition 1992.

[ 9 ] R. L. Goodstein. 数学基礎論入門. 培風館，1979. 赤攝也 訳.

[10] 萩谷昌己，西崎真也．論理と計算のしくみ．岩波書店，2007.

[11] P. Hájek. *Metamathematics of Fuzzy Logic,* Vol. 4 of *Trends in Logic.* Kluwer Academic Pub., 1998.

[12] J. R. Hindley. *Basic Simple Type Theory,* Vol. 42 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science.* Cambridge University Press, 1997.

[13] J. R. Hindley and J. P. Seldin. *Lambda-calculus and Combinators, an Introduction.* Cambridge University Press, 2008.

[14] 小野寛晰．情報科学における論理．日本評論社，1994.

[15] 小野寛晰．情報代数．共立出版株式会社，1994.

[16] A. S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic,* Vol. 29 of *CSLI Lecture Notes.* CSLI, 1992.

[17] D. van Dalen. *Intuitionistic Logic,* Vol. 5 of *Handbook of Philosophical Logic,* pp.1–114. Kluwer Academic Pub., 2nd edition, 2002.

[18] M. Zakharyaschev, F. Wolter and A. Chagorv. *Advanced Modal Logic,* Vol. 3 of *Handbook of Philosophical Logic.* Kluwer Academic Pub., 2nd edition, 2001.

[19] 斎藤 正彦．超積と超準解析 (増補新版)．東京図書.

# あとがき

2010年3月18日にウオッカの引退が発表された．ウオッカは2007年の東京優駿(日本ダービー)を制覇しているが，牝馬による日本ダービー制覇は1943年のクリフジ以来64年ぶりのことである．そのクリフジは11勝無敗であったが，ウオッカと同い年のアメリカ合衆国の牝馬ゼニヤッタはまだ無敗(16勝)である．ゼニヤッタが無敗のまま引退するかどうかは分からない．本書の「命題論理の意味論」のところの例文として1990年代の古い事項についての文が出てくる．ゼニヤッタについての事項のような新しいものと変えることも考えたが，最初の草稿ができたころの時代を反映しているのもいいだろうということでそのままにした．

私が本書の原形を17,8年ほど前に書き始めたのは，出版の当てもなくということではなかった．ある出版社から「論理学」という書名ですぐにでも出版されるという目論見であった．その「論理学」の1章と2章を書き始めたのである．著者は3人で，古森が1章と2章，小野寛晰さんが3章，A氏が4章をそれぞれ担当する，というものであった．また，内容は1章が「命題論理」，2章が「述語論理」，3章が「いろいろな論理」，4章が「Prolog」ということであった．私と小野さんは原稿を書き上げたのであるが，A氏の原稿ができあがらず「論理学」は幻の書となってしまった．

小野さんとは若いころよく一緒に山を登った．歩きながら語ることは健康にも数学にもいいようである．山ではなく地下鉄の通路であったが，九州大学の廣川佐千男さんと話していて新しい定理とその証明を発見したことがある．本書の読者諸氏にも，本書と紙と鉛筆をリュックに入れて数理論理学を語り合える友と旅に出ることをお勧めしたい．

古森雄一

共著者の古森雄一さんとは，私が30を過ぎたころからよく一緒に山登りをした．山道を歩きながら，そしてまた山登りの行き帰りの電車の中で，果てしのないおしゃべりや議論をした．話題はたわいのないうわさ話から数学の問題まで多岐に及んだが，歩きながら数学の話をするときには数式を紙に書くこともできず，随分もどかしい思いをしたことを思い出す．

2人がよく議論した論理学の話題は，そのころ共通に関心を持っていた中間論理や部分構造論理に関するものが多い．私たちが部分構造論理について研究を始めたのは80年代の初め

であるが，そのときは「部分構造論理」という言葉は世の中になかった．たまたまある会合で 2 人が一緒になり，そのときの議論がきっかけになって研究が始まったのだった．それから 1 年ほどかかって論文が完成し，さらにもう 1 年後の 1985 年に出版された．この論文はいまでは部分構造論理に関するひとつの基本的文献と見なされている．ただし部分構造論理という言葉が使われるようになったのは 1990 年のドイツでの国際会議以降である．私が担当した 4 章ではこれらの中間論理や部分構造論理のほか，基本的な非標準論理である直観主義論理や様相論理のさまざまな体系を紹介している．また最近大きな関心を集めている「論理学への代数的アプローチ」の基礎となる普遍代数や代数的論理学の一端にもふれた．

まえがきでも述べたことだが，私は本書の構成や内容の展開の仕方は他にないユニークなものだと思っている．当然のことながらユニークさ自体が目的なのではない．紋切り型の慣習的な考え方から自由であってほしいという私たちの意図がこのような形になったのだ．この本が読者の好奇心を刺激し，さらに新たな理解の獲得やさらに発見につながってほしいと願っている．そして，数学とはどこからかあたえられるものではなく，自分たちが考え作り出していくものなのだ，ということを少しでも読者に伝えたいと思っている．

小野寛晰

# 索引

古森雄一（こもり・ゆういち）

略歴

1947 年　東京都に生まれる．
1970 年　東京工業大学理工学部物理学科を卒業．
1972 年　東京大学大学院理学研究科修士課程を修了．
静岡大学理学部助教授，千葉大学理学部教授を経て，
現　在　千葉大学総合メディア基盤センター教授．理学博士．

小野寛晰（おの・ひろあきら）

略歴

1942 年　愛知県に生まれる．
1966 年　東京大学教養学部基礎科学科を卒業．
1968 年　東京大学大学院理学系研究科修士課程を修了．
広島大学総合科学部教授，北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科教授を経て，
現　在　北陸先端科学技術大学院大学先端融合領域研究院特別招聘教授．理学博士．

主な著書

『情報代数』（共立出版）
『情報科学における論理』（日本評論社）
《Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics》（共著；Elsevier）

現代数理論理学序説（げんだいすうりろんりがくじょせつ）

2010 年 6 月 25 日　第 1 版第 1 刷発行

著　者……古森雄一・小野寛晰
発行者……黒田敏正
発　行……株式会社 日本評論社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4
TEL：03-3987-8621［販売部］　http://www.nippyo.co.jp
企画・制作……亀書房［代表：亀井哲治郎］
〒264-0032 千葉市若葉区みつわ台 5-3-13-2
TEL & FAX：043-255-5676
http://homepage2.nifty.com/kame-shobo/
印　刷……三美印刷株式会社
製　本……株式会社精光堂
装　訂……海保　透
ISBN 978-4-535-78556-4　Printed in Japan